كلية العلوم القانونية و الإقتصادية
و الإجتماعية الدارالبيضاء
Faculté des Sciences Juridiques,
Economiques et Sociales Casablanca

UNIVERSITE HASSAN II

Faculté des sciences économiques, juridiques et sociales

COURS DE

MATHEMATIQUES FINANCIERES

Hasnaa BENOMAR

FILIERE SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION –SEMESTRE 2

Objectif du cours:

L'objectif principal de ce cours est de familiariser l'étudiant avec les principaux concepts des mathématiques financières et de lui fournir les outils et techniques nécessaires pour résoudre les problèmes financiers. On retrouve ces problèmes dans plusieurs domaines de la finance: investissements, assurances, rentes, amortissements, obligations…

Méthodes pédagogiques : cours théoriques et travaux dirigés intégrés.

Plan du cours: pour atteindre les objectifs, le contenu du cours est structuré de la manière suivante :

Séance 1	2H	Présentation du programme et du mode d'évaluation, bibliographie.
		La boite à outils mathématiques : révision des puissances, logarithmes, suites arithmétiques et géométriques pour faire les calculs financiers
Séance 2	2H	thème 1 : OPERATIONS FINANCIERES A COURT TERME Intérêt Simple, Définition et Justification de l'intérêt Formule fondamentale de l'intérêt simple. Valeur acquise par un capital. Taux moyen d'une série de placements effectués simultanément
Séance 3	2H	Capitalisation et Actualisation
		Intérêt précompté – Taux effectif de placement
Séance 4	2H	Séance de TD intérêts simples
Séance 5	2H	Escompte : Notion d'effet de commerce. Escompte commercial. Valeur actuelle commerciale .Equivalence d'effets ou de capitaux – Notion d'équivalence, Détermination de la date d'équivalence de deux effets
Séance 6	2H	Problèmes pratiques posés par la notion d'équivalence : Renouvellement d'un effet. Extension du problème de renouvellement : Echéance commune Echéances moyenne de plusieurs effets Pratique de l'escompte : le coût de l'escompte. Le taux réel de l'escompte. Comparaison des conditions d'escompte faites par deux banques. Taux de revient de l'opération d'escompte
Séance 7	2H	Escompte Notion d'effet de commerce. Escompte commercial. Valeur actuelle commerciale
Séance 8	2H	THEME 2 : OPERATIONS FINANCIERES A LONG TERME : Intérêt Composé Principe et champ d'application. Formule fondamentale des intérêts composés. Calculs sur la formule fondamentale des intérêts composés
Séance 9	2H	Valeur actuelle, évaluation d'un capital à une date donnée
Séance 10	2H	Taux équivalents – Taux proportionnels
Séance 11	2H	Séance de TD intérêts composés
Séance 12	2H	les annuités constantes de fin de période
Séance 13	2H	Les emprunts indivis. Définition. Remboursement d'un emprunt
		Amortissements par annuités constantes .Construction d'un tableau d'amortissement
Séance 14	2H	Séance de TD sur le thème 2

CONSEILS :

En première année, vous devez apprendre (ou perfectionner !) l'art du travail individuel: motivation, détection des difficultés (et identification de ressources pour les résoudre !), rythme de l'apprentissage… C'est une année difficile, non pas que les cours soient très compliqués, mais parce que vous allez être seul(e)s face à toutes ces connaissances nouvelles. Avec l'expérience, vous allez acquérir une très bonne autonomie, un bon esprit critique, la capacité d'analyser les choses en profondeur et une grande force de travail (caractéristiques des étudiants qui réussissent un cursus universitaire) mais, en attendant, en première année, deux clefs peuvent vous guider vers le succès:

- venez en cours, même si la présence en amphi n'est pas obligatoire
- Des exercices choisis sont à préparer en dehors des cours et avant les séances d'exercices. Les exercices à préparer seront annoncés quelques jours à l'avance. Il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions !
  Un travail personnel, en dehors des séances de cours et d'exercices, est attendu de l'étudiant tout au long de l'année. Un travail régulier est indispensable pour atteindre les objectifs.

REMARQUES ORGANISATIONNELLES :

Le cours est donné en français.
Les GSM, téléphones portables, tablettes et autres ordinateurs ne sont pas utiles pendant le cours et nuisent à la concentration. Ces appareils devront être éteints, alarme désactivée, pendant les cours.

CONTACT : hasnaa.benomar@univh2c.ma

Table des matières

LA BOITE A OUTILS INDISPENSABLES

Ce vous allez apprendre :

Les mathématiques financières utilisent les puissances, les logarithmes et les suites arithmétiques et géométriques pour faire les calculs financiers. Elles utilisent aussi certaines fonctions linéaires, exponentielles, logarithmes pour des calculs plus compliqués. Les calculs peuvent être réalisés de manière traditionnelle en utilisant des tables numériques, des tables financières ou des tables de logarithmes.

L'objet de ce chapitre est de faire des rappels mathématiques simples dont le niveau ne dépasse pas celui du baccalauréat.

La progression des différentes notions que nous avons choisi de suivre ici est inspirée d'un texte de Jean-Pierre Demailly intitulé « puissances, exponentielles, logarithmes de l'école primaire jusqu'à la terminale ».Elle présente l'avantage de pouvoir se passer de notions telles que les équations différentielles et le calcul intégral pour définir le logarithme et l'exponentielle.

1. PUISSANCES

Nous commençons par quelques rappels sur les puissances d'exposant entier (positif ou négatif) d'un nombre réel même si dans l'application aux mathématiques financières, il n'y a en réalité que des nombres décimaux ; puis celles d'exposant fractionnaire.

1.1. EXPOSANT ENTIER

Soit $n \geq 1$ un entier positif et a un nombre réel on note a^n et on appelle puissance n-ième de a, le produit de nombre égaux à a.

Exemples :

$a^1 = a$; $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$; $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Pour calculer avec les puissances, on dispose des propriétés suivantes :

pour n≥ 1, m≥1 et a un nombre réel : $a^{n+m} = a^n \times a^m$

pour n≥ 1, m≥1 et a un nombre réel : $a^{nm} = (a^n)^m$

pour n≥ 1, a et b nombres réels : $(ab)^n = a^n \times b^n$

Ces propriétés s'établissent en raisonnant directement à partir de la définition, nous pouvons observer que : $\frac{3^5}{3^5} = 1$

Et de façon plus générale, pour n≥1et a un nombre réel non nul : $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Ainsi on est conduit à poser, pour n≤1et a un nombre réel non nul : $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ qui a bien un sens puisque n≥1est entier.

Maintenant pour n et m sont deux entiers supérieurs à 1 vérifiant $n \neq m$ et a un nombre réel non nul : $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$

La question se pose alors de définir a^0 pour a réel. Si $a \neq 0$, on pose par convention $a^0 = 1$ afin que les propriétés ci- dessus restent vraies pour tous entier n et m indépendamment de leur signe.

Une fois les puissances d'exposant entier définies, nous pouvons définir les puissances d'exposant fractionnaire ou réel.

1.2 EXPOSANT FRACTIONNAIRE OU REEL

Si $q \geq$ 1est un entier, on définit, pour chaque nombre réel a> 0 la puissance $a^{1/q}$comme la solution réelle positive de l'équation $x^q = a$ on écrit aussi $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ et on a ($a^{1/q})^q = a$

Si maintenant $r = p\ /q$ est un nombre rationnel, avec p entier relatif et q entier naturel non nul, on pose : $a^r = a^{p/q}$ =($\sqrt[q]{a})^p$

Les formules précédentes sont alors valables pour n et m rationnels et a> 0 réel.

Si maintenant $x$est un nombre réel .on voudrait définir a^x pour $a > 0$ réel .Il suffit pour cela d'utiliser les approximations décimales (donc rationnelles) de x par défaut et de x par excès .Soient (r_n) et (r'_n) ces deux suites; respectivement. On démontre alors, en utilisant des propriétés générales sur les suites que les suites$(a^{r_n})et\ (a^{r'_n})$ ont la même limite .C'est cette limite commune que l'on notera a^x

Attention :

Il n'est pas possible de définir de manière univoque 0^0 .En effet, si ce nombre existait, pour des raisons de continuités il serait bon qu'il soit égal à la limite de l'expression x^y lorsque x et y tendent vers 0 ; or cette limite fait partie des « formes indéterminées ».Le lecteur intéressé pourra aller consulter la discussion attenante sur le lien suivant : http//www.les mathematiques.net/forum/Read PHP ?4, 524525, page=1

2. LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GEOMETRIQUES

2.1. Suite arithmétique

On appelle suite arithmétique de raison r, la donnée d'une collection infinie de nombres réels indexée par l'ensemble des entier naturels, notée u_n et vérifiant $u_{n+1} - u_n = r\ pour\ tout\ entier\ n \geq 0$

Le problème se pose alors :

- de calculer le terme général de la suite, c'est-à-dire d'exprimer u_n en fonction de n

- de calculer les $n + 1$ premiers termes de la suite

- de déterminer sa nature, c'est -à-dire sa limite, si elle existe

Nous donnons ci-dessous la réponse à ces trois problèmes :

Terme général

L'expression du terme général d'une suite arithmétique $u_n$de raison r est :

$u_n = u_0 + nr \quad pour\ tout\ entier\ n \geq 0$

Cela ce démontre par récurrence sur l'entier n.

Somme des n+1 premiers termes

Appelons S_n la somme $u_0 + u_1 + u_2 \ldots \ldots \ldots .. + u_n$

$2s_n = u_0 + u_1 + \ \ldots \ldots .. + u_n + u_0 + u_1 + \ \ldots \ldots + u_n$

$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$

$2s_n = (u_0 + u_0 + nr) + (u_0 + r + u_O + (n-1)r) + \cdots + (u_O + (n-1)r\ +\ u\ _0 + r) + (u_0 + nr + u_0)$

$2s_n = (u_0 + u_0 + nr)(n+1)$

D'où finalement : $s_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$

C'est-à-dire que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison r est égale à la demi-somme du produit du nombre de termes de la suite par la somme du premier et du dernier terme.

Nature

Il y a trois cas à envisager :

- si $r = 0$ la suite est constante, et la limite est égal à son premier terme

- si $r > 0$ la suite est strictement croissante et sa limite est $+\infty$

- si $r < 0$ la suite est strictement décroissante et sa limite est $-\infty$

2.2. **Suite géométrique**

On appelle suite géométrique de raison $q \neq 0$, la donnée d'une collection infinie de nombres réels indexée par l'ensemble des entiers naturels, notée (u_n) et vérifiant : $u_{n+1= \ q}u_n$ pour tout entier $n \geq 0$

Le problème se pose alors :

- de calculer le terme général de la suite, c'est-à-dire d'exprimer u_n en fonction de n

- de calculer la somme des $n+1$premiers termes de la suite

- de déterminer sa nature c.-à-d. sa limite, si elle existe

Nous donnons ci-dessous la réponse à ces trois problèmes :

Terme général

L'expression du terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est : $u_n = u_0 q^n$ pour tout entier $n \geq 0$.Cela se démontre par récurrence sur l'entier n.

Somme

Appelons que s_n la somme: $u_0 + u_1 + \ \dots . + u_n$, on calcule :

$s_n - qs_n = u_0 + u_1 + \cdots + \ u_n - qu_0 - qu_1 - \cdots - qu_n$

$s_n - qs_n = u_0 + qu_0 + \cdots + q^n u_0 - qu_0 - q^2 u_0 - \ \dots - q^{n+1} U_0$

$s_n - qs_n = u_0 - q^{n+1} u_0$

D'où finalement, si $q \neq 1$: $s_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

C'est-à-dire que la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q est égale au produit du premier terme par le quotient de la différence entre 1 et la raison élevée à la puissance du nombre de termes et de la différence entre 1et la raison

Nature :

Il y a plusieurs cas à envisager (on supposera $q > 0$)

-si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, la suite est constante et sa limite est égale à son premier terme

-si $u_0 > 0 \ et \ q > 1$ la suite est strictement croissante et sa limite est $+\infty$

-si $u_0 > 0 \ et \ q < 1$ la suite est strictement décroissante et sa limite est 0

-si $u_0 < 0 \ et \ q > 1$ la suite est strictement décroissante et sa limite est $-\infty$

-si $u_0 < 0 \ et \ q < 1$ la suite est strictement croissante et sa limite est 0

On ne traitera pas ici le cas ou $q < 0$ dans les applications pratiques aux mathématiques financières, on n'en a pas besoin.

3. FONCTIONS LOGARITHMIQUES ET FONCTIONS EXPONENTIELLES

Une fois qu'on a construit a^x pour $a > 0$ réel et x réel, on peut introduire les fonctions exponentielles et les logarithmes.

On appelle fonction exponentielle de base a la fonction qui au réel x associe le réel a^x.

Ces fonctions sont continues, prennent des valeurs strictement positives tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$et vers 0 lorsque x tend vers$-\infty$, par conséquent pour chaque réel $x > 0$, il existe un unique reel y tel que $a^y = x$; on note alors $y = \log_a(x)$

On appelle fonction logarithme de base a la fonction qui au réel $x > 0$ associe le réel $\log_a(x)$

Grossièrement parlant, les fonctions logarithmes « transforment les produits en sommes », alors que les fonctions exponentielles « transforment les sommes en produits »c'est ce que nous allons voir ci-dessous.

Propriétés des fonctions exponentielles de base a

1) La fonction a^x est définie, continue et strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels.

2) pour x et y réels $a^{x+y} = a^x \times a^y$

3) pour x et y réels $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$

4) pour x réel et r rationnel $(a^x)^r = a^{xr}$

5) la fonction exponentielle de base a prend la valeur 1en 0 : $a^{\,0} = 1$

Propriétés des fonctions logarithmes de base a

1) la fonction $\log_a(x)$ est définie, continue et strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
2) Pour x et y réels
   $\mathrm{Log}_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

3) pour x et y réels :$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

4) pour x réel et r rationnel :$\log_a(x^r) = r\log_a(x)$

5) la fonction logarithme en base a prend la valeur 0 en1 : $\log_a(1) = 0$

Une dernière propriété importante est que les fonctions exponentielles et logarithmes de base a sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, c.-à-d. que

$\log_a(a^x) = x$ pour x réel, et $a^{\log_a(x)} = x$ pour $x > 0$ réel

Logarithmes décimal et népérien, fonction exponentielle

Lorsque $a = 10$, la fonction $\log_a = log_{10}$ s'appelle logarithme décimal ; souvent on la note simplement log. C'est cette fonction qui sert le plus pour les applications en mathématiques financières.

Lorsque $e = a$ la fonction $\log_a = log_e$ s'appelle logarithme naturel ou népérien (en hommage à John Napier, 1550-1617, mathématicien écossais qui a inventé les logarithmes) Souvent, on la note plus simplement ln, par ailleurs la fonction exponentielle de base $a = e$ correspondante s'appelle simplement fonction exponentielle et se note e^x.

4. RESOLUTION D'EQUATIONS DE PREMIER ET SECOND DEGRE

Nous allons faire quelques rappels sur les équations de degré 1et 2 à une inconnue.

- Une équation de degré 1 à une inconnue est une équation qui peut se ramener à la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ et b des réels quelconques.

Exemple : $(x+3)^2 - (x+1)^2 = 0$ est une équation de degré 1 car elle est équivalente à : $4x + 8 = 0$ (ici $a = 4 \; et \; b = 8$)

L'unique solution d'une telle équation est $x = -\frac{b}{a}$ dans notre exemple on a donc $x = -\frac{8}{4} = -2$

-Une équation de degré 2 à une inconnue est une équation qui peut se ramener à la forme :
$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0 \; et \; b, c$ des réels quelconques.

Exemple : $x^2 + 1 = 2x$ est une équation de degré 1 car elle est équivalente à $x^2 + 1 - 2x = 0$ (ici $a = 1$, $b = -2 \; et \; c = 1$)

Une telle équation a deux solutions, une solution double ou aucune solution, selon la valeur de la quantité $\Delta = b^2 - 4ac,$ appelée discriminant :

- si $\Delta > 0$ les deux solutions sont : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $et\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$ il y a une solution double : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

Dans notre exemple, il y a une solution double $x_1 = x_2 = 1$

5. RESOLUTION D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS LINEAIRES A DEUX INCONNUES

Soit le système d'équations linéaires : $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

La solution d'un système est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables x et y de sorte que les deux équations sont satisfaites simultanément.

Exemple :

$x = 1\ et\ y = 2$ est une solution de système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3y - 1 = 1 \end{cases}$$

En effet lorsque les variables x et y sont substituées par 1 et 2 respectivement, les deux équations sont satisfaites : $2(1) + 3(2) = 2 + 6 = 8\ et\ 3(1) - (2) = 3 - 2 = 1$

Il serait faux de dire que $x = 4\ et\ y = 0$ est également une solution de système car

$2(4) + 3(0) = 8 + 0 = 8$ mais $3(4) - (0) = 12 \neq 1$

Quoique la première équation du système soit satisfaite, la seconde ne l'est pas.

Essentiellement, il existe 2 méthodes distinctes pour résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues quelle que soit celle que vous choisirez d'employer, sachez que la solution trouvée sera la même.

<u>Méthode de substitution</u> :

Deux variables sont présentes dans chacune des équations .La méthode de substitution vous permettra d'utiliser l'information contenue dans une des deux équations pour réduire la seconde à une seule variable. Il s'agit de suivre les étapes suivantes :

1. Dans la première équation, isoler x .Il est normal que vous n'obteniez pas une valeur précise tout de suite. Vous devriez plutôt avoir une expression dans laquelle x dépend de y .
2. Substituer x dans la seconde équation par l'expression trouvée à l'étape précédente. Normalement, vous devriez obtenir une expression n'ayant que la variable y.
3. Résoudre pour y
4. Trouver x en utilisant l'expression trouvée en 1. et la valeur de y maintenant découverte.

Il sera parfois plus simple d'isoler y dans la seconde équation, et de remplacer l'expression obtenue dans la première.

Exemple : résoudre le système à deux inconnues

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2y + 5y = 9 \end{cases}$$

Solution :

Isoler x dans la première équation : $x = 5 - 3y$

Substituer x dans la seconde équation par $5 - 3y$: $2(5 - 3y) + 5y = 9$

Résoudre pour y : $-6y + 5y = 9$ soit $-y = 9 - 10$ donc $y = 1$

Trouver x : nous avons trouvé que $x = 5 - 3y$ et nous savons maintenant que $y = 1$

Donc $x = 5 - 3(1)$ soit $x = 5 - 3$ ou encore $x = 2$

La solution du système $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2y + 5y = 9 \end{cases}$ est donc $x = 2$ *et* $y = 1$

<u>Méthode des combinaisons linéaires</u> :

Considérons le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 6x + 2y = 12 \\ -6x + 3y = 18 \end{cases}$$

La méthode de substitution ici ferait apparaître des fractions qui seraient à la fois s difficiles à manipuler. Nous pouvons constater que le coefficient de x est 6 dans les deux équations. Ne serait-il pas agréable d'additionner le 6x de la première équation au $-6x$ de la deuxième pour qu'ils s'annulent ? En fait, nous pouvons le faire… en suivant certaines règles. En effet, effectuer des combinaisons linéaires de deux équations consiste à additionner ou soustraire toute une équation à une autre et non seulement quelques termes spécifiques. Par exemple, dans le cas présenté ci-dessus, effectuer l'addition des deux équations produirait : $6x + 2y - 6x + 3y = 12 + 8$ soit $5y = 20$ duquel nous tirons $y = 4$. Par la suite, substituer y par 4 dans l'une ou l'autre des équations de départ permettra d'obtenir la valeur de x.

Comme la substitution, vous remarquerez que la méthode des combinaisons linéaires transforme un système à deux variables en une équation à une seule inconnue. Il s'agira pour vous de suivre les consignes suivantes :

1. Multiplier une des équations (ou les deux, si nécessaire) de sorte que la variable x ait des coefficients opposés ;
2. Effectuer l'addition des nouvelles équations. La variable x devrait s'annuler ;
3. Résoudre pour y à l'aide de l'expression obtenue en 2) ;
4. Substituer y par la valeur obtenue en 3) dans l'une ou l'autre des équations de départ.

Exemple :

Résoudre le système à deux variables suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

Solution :

1. En multipliant la première équation par 3 et la seconde par -2, les coefficients de x seront opposés (6 et -6, respectivement)

$$\begin{cases} 3(2x - 3y = 8) \\ -2(3x + 4y = -5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 24 \\ -6x - 8y = 10 \end{cases}$$

2. Effectuer l'addition des nouvelles équations obtenues à l'étape précédente

$6x - 9y - 6x - 8y = 24 + 10$ donc $-17y = 34$

3. résoudre pour y : $-17y = 34$ donc $y = -2$

4. Substituer la valeur de y dans l'une ou l'autre des équations de départ

De la première équation nous avons que : $2x - 3y = 8$ soit $2x - 3(-2) = 8$ ou encore $2x + 6 = 8$ soit $2x = 2$ et $x = 1$ .La solution du système est donc $x = 1$ et $y = -2$

Il peut s'avérer plus simple de multiplier les équations de sorte que les coefficients de y s'annulent. Les étapes à suivre dans ce cas seraient tout à fait équivalentes à ceux que nous venons de démontrer.

L'avantage de la méthode des combinaisons linéaires est qu'elle s'adapte facilement aux cas plus complexes.

LES INTERETS SIMPLES

NOTION D'INTERET:

Lorsqu'une personne prête de l'argent à une autre, elle se prive de l'usage de cette somme d'argent qu'elle aurait pu dépenser ou faire fructifier .Cette privation ressentie par le prêteur, qui se prive d'une consommation immédiate et qui court un risque de non-remboursement est rémunérée comme toute location d'objet .L'intérêt est alors le loyer de l'argent .Il peut être une dépense ou un revenu. Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur : l'intérêt correspond à la rémunération du capital prêté. Il s'agit d'un revenu pour le prêteur : l'intérêt est le revenu tiré du capital prêté. Le prêteur peut être un particulier, mais le plus souvent c'est une banque ou un organisme financier. Par sa nature même, le versement d'un intérêt peut engendrer des abus, dont le plus connu est l'usure.

L'intérêt versé par un emprunteur à un prêteur est proportionnel au taux d'intérêt accepté qui est souvent un taux généralement admis sur un marché financier à la date d'aujourd'hui, à la durée du prêt et au montant du capital prêté.

On distingue l'intérêt simple généralement utilisé pour les placements à court terme (moins d'un an) et l'intérêt composé généralement utilisé pour les placements à moyen et long terme (plus d'un an).

1. DEFINITION DE L'INTERET SIMPLE

Dans le cas de l'intérêt simple le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt .L'emprunteur doit verser à la fin de chaque période l'intérêt dû.

2. CALCUL DE L'INTERET SIMPLE

Si nous désignions par C le capital, T le taux d'intérêt, n la durée de placement en années, l'intérêt rapporté par le capital C est alors donné par la formule : $I = \frac{C \times n \times T}{100}$

Application : calculez l'intérêt produit par un capital de 35 850 dhs placé pendant 3ans à un taux d'intérêt annuel de 5,5%

$I = \frac{C \times n \times T}{100}$ A.N : $I = \frac{35850 \times 3 \times 5{,}5}{100} = 5915{,}25\ Dhs$

Souvent la durée de prêt ou de placement est inférieure à l'année : on peut obtenir des prêts au mois et même pour quelques jours.

Si la durée du placement est exprimée en jours, alors la formule générale de l'intérêt devient : $I = \frac{C \times j \times T}{36000}$

(L'année commerciale étant comptée pour 360 jours.)

Si la durée du placement est exprimée en mois, alors la formule générale de l'intérêt devient : $I = \frac{C \times m \times T}{1200}$

Application1 : quel est l'intérêt produit par un placement à intérêt simple d'une somme d'argent de 12 500 Dhs au taux annuel de 5,25% pendant 96 jours ?

Application 2 : quel est l'intérêt produit par un placement de 15 500 Dhs au taux annuel de 4,25 % pendant 7 mois ?

Application 3 : soit un capital de 35000 Dhs placé à intérêt simple du 17 mars au 27 juillet de la même année et au taux annuel de 6,25% .Calculez l'intérêt produit par ce placement.

Solution:

Application1 : $I = \frac{C \times j \times T}{36000}$ $A.N$: $I = \frac{12\,500 \times 96 \times 5{,}25}{36000} = 175\ Dhs$

Application 2 : $I = \frac{C \times m \times T}{1200}$ $A.N$: $I = \frac{15\,500 \times 7 \times 4{,}25}{1200} = 384{,}27\ Dhs$

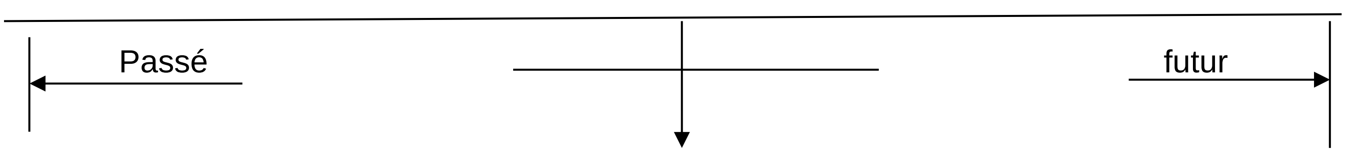
Application3 : $I = \frac{C \times J \times T}{36000}$ A.N : $I = \frac{35000 \times 132 \times 6{,}25}{36000} = 802{,}08\ Dhs$

Remarque : si la durée du placement s'exprime d'une date à une autre, il faut compter le nombre de jours exacts dans chaque mois la date initiale exclue et la date finale incluse.

3. LA FLECHE DU TEMPS

Pour concrétiser les paramètres d'un problème de mathématiques financières et pour lier les paramètres entre eux il est souvent utile de tracer une ligne de temps. Contrairement au temps réel qui n'a qu'un sens, du présent vers le futur avec impossibilité de retourner dans le passé, le temps mathématique fonctionne dans les deux sens, du passé au futur ou du futur avec retour vers le passé. Partir du présent ou du passé, on peut connaitre la valeur future d'un capital ayant produit des intérêts : c'est la valeur acquise, à partir de la valeur future d'un capital on peut calculer sa valeur à la date d'aujourd'hui : c'est la valeur actuelle. A quoi servent la valeur acquise et la valeur actuelle ? Surtout à faire des comparaisons : si un premier banquier propose à une personne un placement au taux T_x pendant une durée n_x ,et un second banquier un placement au taux T_y pendant une durée n_y avec $T_x \neq T_y$ et $n_x \neq n_y$ on peut comparer la valeur actuelle à la date d'aujourd'hui de ces deux contrats, ou; si on le désire la valeur future qu'ils auront en fin de contrat .Nous reviendrons très largement sur cette question l' une des plus fondamentales des mathématiques financières.

Ligne du temps



Aujourd'hui=Présent

4. VALEUR DEFINITIVE OU VALEUR ACQUISE

La valeur acquise du capital C après p périodes de placement est la somme du capital initial et des intérêts courus. Si nous désignions par V_a la valeur acquise alors : $V_a = C + I$

Exemple: calculez l'intérêt et la valeur acquise d'un placement à intérêts simples :
$C = 15000\ Dhs$, $j = 50\ jours,$ $T = 4{,}5\%\ annuel$

$I = \frac{C \times j \times T}{36000}$ A.N: $I = \frac{15000 \times 50 \times 4{,}5}{36000} = 93{,}75\ Dhs$

$V_a = C + I$ A.N: $V_a = 15000 + 93{,}75 = 15093{,}75\ Dhs$

5. TAUX MOYEN DE PLUSIEURS PLACEMENTS

Soient 3 capitaux $C1$, $C2$ et $C3$ placés à des taux annuels différents respectivement $T1$, $T2$ et $T3$ et pendant des durées différentes respectivement $j1, j2$ et $j3$ exprimées en jour.

L'intérêt global I_G produit par les 3 capitaux est : $I_G = I1 + I2 + I3 = \frac{C1\times J1\times T1}{36000} + \frac{C2\times J2\times T2}{36000} + \frac{C3\times J3\times T3}{36000}$

Définition: le taux moyen de ces 3 placements est un taux unique noté Tm qui appliqué à l'ensemble de ces 3 placements donne le même intérêt global.

Si les 3 capitaux étaient placés au taux Tm, ils auraient rapporté un intérêt global I_G donné par :

$$I_G = I1 + I2 + I\,3 = \frac{C1\times J1\times Tm}{36000} + \frac{C2\times J2\times Tm}{36000} + \frac{C3\times J3\times Tm}{36000}$$

Soit $(c1j1 + c2j2 + c3j3) \times Tm \;= c1j1T1 + \; c2j2T2 + \; c3j3T3$

et donc $\quad Tm = \frac{c\,1J1T1+C2J2T2+C3J3T3}{C1J1+C2J2+C3J3}$

De manière générale la formule s'écrit : $Tm = \frac{\sum_{k=1}^{n} Ckjktk}{\sum_{k=1}^{n} ckjk}$

Application: calculez le taux moyen des placements suivants : 2000 Dhs placés pendant 30 jours à 7% annuel, 7000 Dhs placés pendant 60 jours à 10% annuel et 1000 Dhs placés pendant 50 jours à 9% annuel.

$Tm = \frac{C1J1T1+C2J2T2+C3J3T3}{C1J1+C2J2+C3J3}$ A.N : $Tm = \frac{2000\times30\times7+7000\times60\times10+1000\times50\times9}{2000\times30+7000\times60\times1000\times50} = 9{,}57\%$

6. INTERET PRECOMPTE ET TAUX EFFECTIF DE PLACEMENT

6.1 Intérêt précompté : définition

Il existe deux manières de paiement des intérêts .Selon les modalités du contrat, les intérêts dus peuvent être versés en début ou en fin d'opération .Si les intérêts dus sont payés à l'issue de l'opération, on dit que les intérêts sont postcomptés(C'est le cas le plus courant)**.**Si les intérêts dus sont payés dès le début de l'opération, on dit que les intérêts sont précomptés.

Lorsque l'intérêt est versé à la fin de l'opération, ce qui est le cas le plus courant, il est dit postcompté ou à terme échu. Ainsi, une somme C placée ou empruntée pendant j jours au taux T postcompté donnera lieu j jours plus tard à un remboursement de : C + I La plupart des opérations financières (découvert bancaire, compte sur livret, placement à terme…) utilise l'intérêt postcompté. ƒ Lorsque l'intérêt est versé au début de l'opération, il est dit précompté. Ainsi, une somme C empruntée sur j jours au taux T précompté ne donne lieu au début de l'opération qu'à un versement de : C - I .A l'échéance, l'emprunteur devra rembourser C. C'est le cas notamment de l'escompte commercial, de certains certificats de dépôts ou de certains billets de trésorerie. L'intérêt précompté avantage le prêteur puisqu'il reçoit l'intérêt plus tôt, au début de la période de placement. L'intérêt postcompté avantage l'emprunteur puisqu'il verse l'intérêt plus tard, à la fin de la période d'emprunt.

Ces deux modes de calcul ne sont pas équivalents du point de vue financier.

6.2 **Taux effectif de placement**

On calcule le taux effectif du placement à chaque fois que les intérêts sont précomptés et que l'intérêt est calculé sur la base de la valeur nominale. Les intérêts sont versés par l'emprunteur le jour de la conclusion du contrat de prêt, jour ou l'emprunteur reçoit le capital prêté. Il est alors évident que les fonds engagés procurent au prêteur un taux de placement supérieur au taux d'intérêt stipulé.

Exemple : Une personne place a intérêt précompté 10000 DH pour 1 an, taux = 10%. Quel taux effectif de placement réalise-t-elle ?

Réponse : L'intérêt procuré par l'opération s'élève a (10000 * 10 *1) / 100 = 1000 DH. Le prêteur reçoit immédiatement cet intérêt. Les choses se passent donc comme s'il n'avait déboursé que 10000 - 1000 = 9000 DH. Le prêteur recevra, dans un an, son capital de 10000 (il a déjà encaissé les intérêts). Il aura donc gagné en un an 1000 DH en engageant seulement 9000 DH. Le taux effectif Te de placement est (9000 * Te * 1) / 100 = 1000 soit Te = 11.11%.

Soit T le taux donné et Te le taux effectif : $I = \frac{CjT}{36000} = \frac{\left(c - \frac{cjT}{36000}\right)Tej}{36000}$

$$T = (1 - \frac{jT}{36000})Te$$

Soit $Te = \frac{36\,000T}{36\,000 - TN}$

L'ESCOMPTE

1. GENERALITES SUR LES MOYENS DE PAIEMENT ET DE CREDIT

Dans nos économies développées, les moyens de paiement et de crédit sont à la fois divers et compliqués. A côté de la monnaie , pièces et billets , il existe de nombreux autre moyens de paiement et de crédit, tels que le chèque bancaire, les mandats postaux, les mandats de trésor public, les virements bancaires, le système de prélèvement automatique par abonnement, les cartes de paiement, de débit, de crédit, le porte-monnaie électronique, la lettre de change, le billet à ordre, le récépissé-warrant, la lettre de crédit, le crédit documentaire international, le titre interbancaire de paiement …

1.1. Le chèque, instrument classique de paiement

Le chèque est un moyen de paiement par l'intermédiaire d'une banque ou d'un établissement financier. Le tireur (personne qui établit le chèque) donne l'ordre à un banquier (le tiré) de payer une somme d'argent au bénéficiaire. Le chèque doit avoir une provision. C'est à dire que le tireur doit avoir une créance sur le tiré (la banque) dans laquelle il doit avoir de l'argent en dépôt.

Le chèque est réglementé par des articles de loi et suivant un code monétaire et financier.il doit contenir les mentions suivantes :

1) la dénomination de chèque, insérée dans le texte même du titre et exprimer dans la langue employée pour la rédaction de ce titre ;

2) le mandat pur et simple de payer un somme déterminée ;

3) le nom de celui qui doit payer, nommé le tiré ;

4) l'indication du lieu où le paiement doit s'effectuer ;

5) l'indication de la date et du lieu où le chèque est créé ;

6) la signature de celui qui émet le chèque, nomme le tireur.

Ses principaux avantages sont qu'il est peu coûteux et que son utilisation est très simple.

Ses principaux inconvénients sont que la possession d'un chèque ne garantit pas son porteur contre le risque de non-paiement ; il peut être perdu ou volé.

1.2. Les effets de commerces, instruments classiques de paiement et de crédit

Les deux grandes catégories d'effets de commerce utilisées sont la lettre de change, qui a beaucoup perdu de son importance avec le développement des applications bancaires électroniques et le billet à ordre, qui lui ressemble beaucoup. La lettre de change est aussi appelée «traite » car elle accomplit un trajet dans sa circulation par endossement.

- la lettre de change ou traite

La lettre de change est un écrit par lequel une personne le tireur, en général un commerçant donne l'ordre à une autre personne, le tiré, de payer une somme déterminée à une échéance convenue à un bénéficiaire, qui peut être le tireur lui-même. La lettre de change peut servir de moyen de paiement si elle est transférée par endossement à un tiers, ou de crédit si elle est escomptée par une banque.

La lettre du change contient :

1) la dénomination de lettre de change, insérée dans le texte même du titre et exprimée dans la langue employée pour la rédaction de ce titre ;

2) le mandat pur et simple de payer un somme déterminée ;

3) le nom de celui qui doit payer, nommé le tiré ;

4) l'indication du lieu où le paiement doit s'effectuer ;

5) l'indication de l'échéance ;

6) la signature de celui qui émet la lettre, nommé le tireur ;

7) l'indication de la date et du lieu où la lettre est créée ;

8) le nom de celui auquel ou à l'ordre duquel le paiement doit être fait .

- <u>le billet à ordre</u>

Le billet à ordre ressemble beaucoup à la lettre de change, la différence essentielle concernant l'ordre de payer. Dans le cas de la lettre de change, le tireur prenant l'initiative, donne l'ordre de payer au tiré : « contre cette lettre de change, veuillez payer telle somme à l'échéance … ».Dans le cas du billet à ordre, c'est le souscripteur, qui est le débiteur qui prend l'initiative et s'engage à payer : « contre ce billet à ordre, je paierai telle somme à l'échéance … »

Comme la lettre de change, le billet à ordre doit comporter des mentions obligatoires telles que

1) la dénomination « billet à ordre » ;
2) la promesse de payer la somme indiquée en lettres et en chiffres ;
3) le nom du souscripteur (débiteur) ;
4) l'indication de l'échéance ;
5) le lieu de paiement ;
6) le nom du bénéficiaire (le fournisseur ou un autre créancier) ;
7) le lieu et la date de création de billet à ordre ;
8) le numéro de compte bancaire du souscripteur et du bénéficiaire ;
9) la signature du souscripteur.

2. DEFINITION DE L'ESCOMPTE COMMERCIAL

L'escompte est un nom masculin qui signifie :

- soit l'opération consistant à acheter un effet de commerce non échu, en le minorant d'intérêts calculés sur la durée restant à courir jusqu'à échéance,
- soit l'intérêt lui-même.

3. CALCUL DE L'ESCOMPTE COMMERCIAL

Monsieur El Mouden, le 2 août 2017, a vendu des marchandises pour 25000 Dhs à son client monsieur Faouzi payables à crédit le 30 novembre 2017 moyennant un effet de commerce. Comme il a besoin d'argent il transmet l'effet à son banquier pour le négocier. On peut dire que monsieur EL Mouden négocie l'effet ou le remet à l'escompte. Le banquier négocie l'effet c'est-à-dire l'achète, non pas à la valeur inscrite sur l'effet soit 25 000 dhs mais pour une valeur inférieure : l'effet de commerce n'aura une valeur de 25 000 dhs que le jour de son échéance, le 30 novembre 2017.Le montant de ces intérêts à courir constitue l'escompte commercial. L'escompte commercial est donc le prix du service rendu par le banquier à son client, il est égal à l'intérêt calculé sur la valeur nominale de l'effet, de la date de remise au banquier à la date d'échéance.

Soit V la valeur nominale de l'effet, valeur inscrite sur l'effet est payable à échéance, soit j la durée qui sépare la date de négociation (le jour de remise de l'effet à l'escompte) et l'échéance de l'effet, soit T le taux d'escompte alors : l'escompte commercial e s'écrit : $e = \frac{Vj.T}{36000}$

Dans notre exemple si le taux d'escompte est de 4,5% alors l'escompte $e = \frac{25000X120X4,5}{36000} = 375\ dhs$

<u>Application</u> :

Calculer l'escompte commercial d'une lettre de change de 6 500 dhs tirée le 23 août 2017, venant à échéance le 12 novembre 2017 et négociée à 6% le 3 septembre 2017.Si elle avait été négociée le 18 octobre 2017, que deviendrait l'escompte ?quelle conclusion en tirez-vous ?

Solution :

Pour la lettre de change de 6 500 dhs : escompte : $e = \frac{vnt}{36000}$

Nombre de jours à courir de la création à l'échéance : 81 jours

Effet négocie le 3 septembre : escompte : $6500 \times \frac{6X70}{36000} = 75{,}84\ dhs$

Effet négocie le 18 octobre : escompte : $6\,500 \times \frac{6X25}{36000} = 27{,}08 dhs$

Plus l'échéance est proche, plus l'escompte est faible .

4. <u>LA VALEUR ACTUELLE</u>

La valeur escomptée $a = V - e$ est aussi appelée valeur actuelle .Il s'agit de calculer aujourd'hui la contrepartie d'une somme payable dans le futur. La valeur actuelle est la différence entre la valeur nominale de l'effet et les intérêts à courir de la date d'escompte à la date d'échéance.

<u>Application</u> : combien le banquier doit t- il remettre à son client s'il escompte le 29/11/2017 un effet de 100 000 Dhs payable le 20/02/2018 ? Taux d'escompte : 9%

Solution : on a $a = v - e$ et $e = \frac{vjt}{36000}$ alors $e = \frac{100\,000 \times 83 \times 9}{36000} = 2075\ Dhs$

Donc $a = 100\,000 - 2075 = 97925\ Dhs$

5. <u>PRATIQUE DE L'ESCOMPTE</u>

Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraine des frais financiers en plus de l'escompte proprement dit. Ces frais comprennent plusieurs commissions. L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appellent l'agio, d'une manière générale l'agio ce compose de :

- L'escompte
- Diverses commissions
- La taxe sur la valeur ajoutée (TVA)

Au Maroc la tva est de 10% .Elle est appliquée directement sur l'ensemble de l'agio (HT) qui se compose le plus souvent par l'escompte et des commissions d'acceptation et de courriers qui sont fixes par bordereau d'escompte.

Remarque : il est à noter que la durée réelle de l'escompte est parfois majorée d'un ou de plusieurs jours appelés couramment jours de banque.

<u>Exemple</u> : soit un effet de commerce de 35 500 Dhs échéant le 27/7/2017 et escompté le 10/04/2017 aux conditions suivantes : taux d'escompte 10%, commission de manipulation 2dhs par effet, tva 10% ; tenir compte d'un jour de banque .Calculez l'agio TTC.

Réponse :

Escompte : $e = \frac{35\,500 \times 109 \times 10}{36000} = 1074,86\ Dhs$

Commissions : $+ \quad 2 \quad Dhs$

Agio HT : $= \quad 1076{,}86 \quad Dhs$

TVA10% : $+ \quad 107,69 \quad Dhs$

Agio TTC : $= \quad 1184{,}55 \quad Dhs$

6. LA VALEUR NETTE

La valeur nette est la somme effectivement mise à la disposition du vendeur de l'effet de commerce avant son échéance.

Valeur nette = valeur nominale - agio TTC

Pour l'exemple précédent : Valeur nette $= 35\,500 - 1184{,}55 = 34315{,}45\ Dhs$

7. TAUX RELATIFS A L'OPERATION D'ESCOMPTE

Si on tient compte dans l'opération d'escompte de l'ensemble des éléments de l'agio, le taux d'escompte pratiqué réellement se trouve majoré.

7.1. TAUX REEL DE L'ESCOMPTE

$$Tr = \frac{Agio\ TTC \times 36000}{Valeur\ nominale \times Durée\ rélle}$$

7.2. TAUX DE REVIENT

$$Te = \frac{Agio\ TTC \times 36000}{Valeur\ nette \times Durée\ réelle}$$

Pour l'exemple précédent : $Tr = \frac{1184{,}54 \times 36000}{35\,500 \times 108} = 11{,}12\%$ et $Te = \frac{1184{,}54 \times 36000}{34315{,}46 \times 108} = 11{,}50\%$

8. EQUIVALENCE DE DEUX EFFETS

Monsieur Faouzi a souscrit un effet de commerce de 4750 dhs en faveur de monsieur El Mouden payable le 30 juin. Le 15 juin, monsieur Faouzi prévient monsieur EL Mouden qu'il ne pourra pas honorer l'effet de 4750 Dhs au 30 juin et lui propose, comme il n'a pas été endossé, de le remplacer par un second effet d'un montant à déterminer, au taux d'escompte de 8% et à échéance au 1er septembre.

Les deux effets sont équivalents à une date déterminée si escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle. Cette date est la date d'équivalence .Soient V1, V2 les valeurs nominales respectives des effets E1, E2 ; J1, J2 les durées d'escompte en jours respectives et T le taux d'escompte. On dira que E1, E2 sont équivalents si et seulement si :

$$V_1 - \frac{V_1 J_1 T}{36000} = V_2 - \frac{V_2 J_2 T}{36000}$$

Dans notre exemple, on peut écrire qu'à la date du 15 juin, les deux effets, le premier à annuler et le second à créer ont la même valeur actuelle, soit :

$$4750 - \frac{4750 \times 15 \times 8}{36000} = V - \frac{V \times 78 \times 8}{36000}$$

D'où $V = 4817{,}67\ Dhs$

Applications

1. On désire remplacer un effet d'une valeur nominale de 75 000 dhs payable dans 60 jours par un autre effet d'une valeur nominale de 74600 dhs .Qu'elle serait l'échéance de cette nouvelle dette ? Taux d'escompte 8%.

2. A quelle date un effet de valeur nominale de 20 000 dhs à échéance du 15/04 est équivalent à un effet de 20 435,86 dhs à échéance du 14/06 de la même année ? Taux d'escompte : 12,6%.

Réponse :

1. On a $v1 = 75000$ $j1 = 60jrs$ $v2 = 74600$ $j2 = \ ?$

$va1 = va2 \iff 75000 - \frac{75000 \times 60 \times 8}{36000} = 74600 - \frac{74600 \times j2 \times 8}{36000}$ soit $j2 = 37$ jours

2. On a $j1 = ?$ et $j2 = j1 + 60$ et $on\ a$ $va1 = va2$

$$v1 - \frac{v1 j1 t}{36000} = v2 - \frac{v2 j2 t}{36000}$$

$$\iff 2000 - \frac{2000 \times j1 \times t}{36000} = 20435{,}86 - \frac{20435{,}86 \times (j1 + 60) \times 12{,}6}{36000}$$

Après calcul : $j1 = 44\ jours$

Donc la date d'équivalence se situe 44 jours avant le 15avril, soit le 02 mars de la même année.

9. EQUIVALENCE DE PLUSIEURS EFFETS : L'ECHEANCE COMMUNE

Si un créancier a tiré plusieurs effets sur un client : par exemple une compagnie de distribution de carburant tire chaque semaine un effet sur une société de transport pour ses consommations hebdomadaires, mais elle souhaite remplacer les effets hebdomadaires par un effet mensuel unique qui soit équivalent aux précédents .Ceci est un problème d'échéance commune.
L'échéance commune est le cas de remplacement de plusieurs effets par un seul effet. L'échéance commune est l'échéance d'un effet unique qui à la date d'équivalence a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

Exemple : on souhaite remplacer le 15 juin les 3 effets ci-dessous par un effet unique :

Effet	Valeur nominale	Echéance
E1	5000	20 aout
E2	4000	15 juillet
E3	12000	20 septembre

Qu'elle est l'échéance de l'effet de 21 200 dhs qui remplace les effets E1, E2, E3 avec un taux d'escompte de 13% ?

Solution :

On a $j1 = 66jrs$ $j2 = 30jrs$ $j3 = 97jrs$

Soit j le nombre de jours qui séparent la date d'équivalence (le 15 juin) de l'échéance de l'effet unique (échéance commune) de remplacement. Au 15 juin, on peut écrire l'égalité entre la valeur actuelle de l'effet unique de remplacement et la somme des valeurs actuelles des effets remplacés :

$$V - \frac{VJt}{36000} = v1 - \frac{V1J1t}{36000} + v2 - \frac{v2j2t}{36000} + v3 - \frac{v3j3t}{36000}$$

$$21200 - \frac{21200 \times J \times 13}{36000} = 5000 - \frac{5000 \times 66 \times 13}{36000} + 4000 - \frac{4000 \times 30 \times 13}{36000} + 12000 - \frac{12000 \times 97 \times 13}{36000}$$

Après les calculs $J = 102{,}25\ jours$ soit $j = 103\ jours$

Donc l'échéance commune se situera 103 jours après le 15 juin soit le 26 septembre de la même année.

10. L'ECHEANCE MOYENNE

L'échéance moyenne de plusieurs effets est un cas particulier de l'échéance commune. On l'obtient quand la valeur nominale de l'effet unique de remplacement est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

$v - \frac{VJt}{36000} = v1 - \frac{V1J1t}{36000} + v2 - \frac{V2J2t}{36000} + v3 - \frac{V3J3t}{36000}$ et $v = v1 + v2 + v3$

D'où $v1 + v2 + v3 - \frac{(v1+v2+v3)Jt}{36000} = v1 - \frac{v1J1t}{36000} + v2 - \frac{v2J2t}{36000} + v3 - \frac{v3J3t}{36000}$, soit encore:

$v1 + v2 + v3 - \frac{(v1+v2+v3)Jt}{36000} = v1 + v2 + v3 - \frac{v1J1t}{36000} - \frac{v2J2t}{36000} - \frac{v3J3t}{36000}$

Donc $\frac{(v1+v2+v3)Jt}{36000} = \frac{v1J1t}{36000} + \frac{v2J2t}{36000} + \frac{v3J3t}{36000}$

Alors $(v1 + v2 + v3)\, jt = \; v1j1t \; + \; v2j2t \; + \; v3j3t$

$$vjt \; = \; (v1J1 + v2J2 + v3J3)\; t$$

$$vJ \; = \; v1J1 + v2J2 + v3J3$$

<u>Remarque :</u> l'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte.

LES INTERETS COMPOSES

1. DEFINITION :

On dit qu'un capital est placé à intérêts composés lorsqu'à la fin de la première période de placement, l'intérêt simple de la première période est ajouté au capital. On parle alors de capitalisation des intérêts. La capitalisation est généralement annuelle mais elle peut être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

2. FORMULE GENERALE DES INTERETS COMPOSES QUAND LE TEMPS DE PLACEMENT EST UN NOMBRE ENTIER DE PERIODE

Exemple 1: la capitalisation est annuelle (la période est donc l'année), le temps de placement est de 2ans. Dans ce cas le temps de placement est un nombre entier de période. En effet deux ans représentent un nombre entier d'année.

Exemple 2: la capitalisation est annuelle, le temps de placement est de 2ans et 6mois .Dans cet exemple le temps de placement n'est pas un nombre entier de période.2 ans et 6 mois représentent 2 années et ½ .C'est un nombre fractionnaire de période.

Exemple 3: la capitalisation est semestrielle (la période est donc le semestre), le temps de placement est de 2ans. Dans cet exemple le temps de placement est nombre entier de période (4 semestres).

Exemple 4: la capitalisation est semestrielle (la période est donc le semestre), le temps de placement est de 3mois.Dans cet exemple le temps de placement n'est pas un nombre entier de période.3 mois représentent ½ semestre.

Détermination de la formule des intérêts composés :

En matière d'intérêts composés on travaille avec $i = T/100$ pour simplifier les formules. Contrairement aux intérêts simples où l'on obtient d'abord l'intérêt I, dans le cas des intérêts composés on obtient d'abord la valeur acquise C_n et on obtient les intérêts par différence entre la valeur acquise et la valeur initiale du capital.

Soit C_0 le capital placé au début de la première période, n la durée de placement en générale en année, i le taux d'intérêt pour la période de capitalisation choisie.

période	Capital placé en début de période	Intérêt payé en fin de période	Valeur acquise en fin de période
1	Co	$Co \times i$	$Co + Co\,i = Co\,(1+i) = C1$
2	$C1 = Co\,(1+i)$	$C1 \times i$	$C1 + C1\,i = C_0(1+i) + C_0\,(1+i)i = Co(1+i)^2$
…	…	…	…
n	$Co(1+i)^{n-1}$	$C_{n-1} \times i$	$Cn = Co(1+i)^n$

De manière générale la valeur acquise après n périodes de placement est : $Cn = Co(1+i)^n$

Application : calculez la valeur acquise par un capital de 100 000 Dhs placé pendant 6 ans à 8% l'an, capitalisation annuelle des intérêts. Refaire l'application dans le cas des intérêts simples.

Solution :

1) intérêts composés : on a $i = 0{,}08$ $\quad n = 6$ $\quad Co = 100\,000$

La valeur acquise est donnée par $Cn = Co(1+i)^n$; A.N: $C_6 = 100\,000(1+0{,}08)^6 = 158687{,}43\ Dhs$

2) intérêts simples : $Va = C + I$ avec $I = \frac{CnT}{100}$ $\quad A.N\colon\ I = \frac{100\,000 \times 6 \times 8}{100} = 48\,000$ dhs

Donc $va = 100\,000 + 48\,000 = 148\,000\ dhs$

3. FORMULE GENERALE DES INTERETS COMPOSES QUAND LE TEMPS DE PLACEMENT EST UN NOMBRE FRACTIONNAIRE DE PERIODE

Exemple 1: la capitalisation des intérêts est annuelle (la période est donc l'année) ; le temps de placement est de 5ans et 7mois .On pose alors $k = 5$ (la partie entière de période) et $p/q = 7/12$ (la partie fractionnaire de période).

Exemple 2 : la capitalisation des intérêts est semestrielle (la période est donc le semestre) ; le temps de placement est de 5 ans et 7mois .On pose alors $k = 11$ (la partie entière de période) et $p/q = 1/6$ (la partie fractionnaire de période).

Détermination de la formule des intérêts composés :

On distingue alors deux solutions : la solution rationnelle et la solution commerciale.

3.1. La solution rationnelle

Calculons la valeur acquise d'un capital de 100 000 dhs placé pendant 5 ans et 7 mois au taux annuel de 8%, capitalisation annuelle des intérêts. Dans ce cas, on considère que la valeur acquise au bout de 5 ans reste placée à intérêts simples pendant les 7 derniers mois de placement.

On a $k = 5$ et $p/q = 7/12$, la valeur acquise est alors : $C_{5+\frac{7}{12}} = Co(1+i)^5 + Co(1+i)^5 \times \frac{7}{12} \times i$

Valeur acquise après 5ans de placement + intérêt simple des 7 derniers mois

$$C_{5+\frac{7}{12}} = C_0\ (1+i)^5 \left(1 + \frac{7}{12} i\right)$$

$$C_{5+\frac{7}{12}} = 100000(1+0{,}08)^5\ (1 + \frac{7}{12} \times 0{,}08) = 153\,789{,}67 dhs$$

De manière générale la solution rationnelle s'écrit : $C_{k+\frac{p}{q}} = Co(1+i)^k (1 + \frac{p}{q} \times i)$

3.2 La solution commerciale

La formule de la solution commerciale est la même que celle des intérêts composés au cas où n est un nombre entier .Elle s'écrit : $C_{k+\frac{p}{q}} = Co(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$

Dans notre exemple: $C_{5+\frac{7}{12}} = Co(1+i)^{5+7/12} = 100\,000(1+0{,}08)^{5+7/12} = 153\,679{,}51\ dhs$

Application : une personne place auprès d'une banque la somme de 450 000 dhs pendant 6ans et 7mois, capitalisation semestrielle des intérêts à 5,25% par semestre.

a) Calculez la valeur acquise, solution rationnelle et solution commerciale.
b) Laquelle de ces deux solutions sera retenue par la banque ?
c) En fait 3 ans et 6 mois avant l'échéance, cette personne demande un remboursement anticipé. Dans ce cas, le taux est ramené à 4,5% par semestre.

Calculez dans ces conditions la somme qui sera remise par la banque au client ?

Solution :

a) Le temps de placement est 6 ans et 7 mois et la capitalisation des intérêts est semestrielle : la période c'est le semestre donc $k = 13$ et $p/q = 1/6$

On a $Co = 450\,000\ dhs$

Solution rationnelle : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^k(1+\frac{p}{q}\times i)$

A.N : $C_{13+\frac{1}{6}} = 450\,000(1+0{,}0525)^{13}\left(1+\frac{1}{6}\times 0{,}0525\right) = 882\,842{,}88\ dhs$

Solution commerciale : $C_{k+\frac{P}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$

A.N : $C_{13+\frac{1}{6}} = 450\,000(1+0{,}0525)^{13+\frac{1}{6}} = 882\,680{,}55\ dhs$

b) La banque utilise la solution commerciale pour remettre le moins d'argent au client.

c) Le temps de placement est de 3ans et 1 mois ; capitalisation semestrielle des intérêts : période c'est le semestre donc $k = 6$ et $p/q = 1/6$

La solution commerciale : $C_{k+\frac{p}{q}} = Co(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$

A.N: $C_{6+\frac{1}{6}} = 450\,000\ (1+0{,}045)^{6+\frac{1}{6}} = 590\,331{,}97\ dhs$

4. TAUX PROPORTIONNEL ET TAUX EQUIVALENT

Dans la formule des intérêts composés, le taux utilisé doit toujours correspondre à la période de capitalisation. L'intérêt composé est souvent défini par un taux annuel. Dans le cas où la capitalisation des intérêts n'est pas annuelle, il faudra alors convertir le taux. On utilisera alors un taux proportionnel ou un taux équivalent.

4.1. **<u>Taux proportionnel</u>**

Il est proportionnel à la période de capitalisation.

Taux annuel de 9% → $taux\ semestriel\ de\ \frac{9\%}{2} = 4{,}5\%$ (une année compte deux semestres)

Taux annuel de 9% → $taux\ trimestriel\ de \frac{9\%}{4} = 2{,}25\%$ (une année compte 4 trimestres)

Taux annuel de 9% → $taux\ mensuel\ de\ \frac{9\%}{12} = 0{,}75\%$ (une année compte 12 mois)

Petite réflexion :

On place 10 000 dhs pendant 1année au taux annuel de 9%.

Si la capitalisation est annuelle, la valeur acquise après 1année de placement est :
$10\ 000\ (1 + 0{,}09)^1 \ \ = 10\ 900\ dhs$

Si la capitalisation est semestrielle, la valeur acquise après 1année de placement est :
$10\ 000\ (1 + 0{,}045)^2 \ = 10\ 920{,}25\ dhs$

Si la capitalisation est trimestrielle, la valeur acquise après 1année de placement est :
$10\ 000\ (1 + 0{,}0225)^4 \ = 10\ 930{,}83\ dhs$

Si la capitalisation est mensuelle, la valeur acquise après 1année de placement est :
$10\ 000\ (1 + 0{,}0075)^{12} \ = 10\ 938{,}07 dhs$

Remarque : le taux proportionnel ne donne pas la même valeur acquise pour un même temps de placement.

<u>4.2. Taux équivalent</u>

Deux taux sont équivalents lorsqu'à intérêts composés ils aboutissent pour un même capital placé à la même valeur acquise pendant la même durée de placement .De manière générale, deux placements définis respectivement par leur taux $i1, i2$ et par leur période de placement $p1, p2$ sont effectués à un taux équivalent s'ils aboutissent pour un même capital à la même valeur acquise .
Soit $C(1 + i_1)^{p1} = C(1 + i_2)^{p2}$

<u>Application</u> :

a) Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 9% ?
b) Quel est le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 9% ?
c) Quel est le taux mensuel équivalent au taux semestriel de 9% ?

Solution : a) On sait que $C(1 + i1)^{p1} = C(1 + i2)^{p2}$ donc $C(1 + ia)^1 = C(1 + is)^2$ soit $1 + ia \ = (1 + is)^2$

Ou encore $\sqrt{1 + ia} = 1 + is \quad \sqrt{1 + ia} - 1 = is \qquad Is = 0{,}044$

b) $C(1 + ia)^1 = C(1 + it)^4 \qquad (1 + ia) = (1 + it)^4 \qquad \sqrt[4]{1 + ia} - 1 = it \qquad it = 0{,}021$

c) $C(1 + is)^1 = C(1 + im)^6 \qquad (1 + is)^1 = (1 + im)^6 \qquad \sqrt[6]{1 + is} - 1 = \ im \qquad im = 0{,}014$

5. Valeur actuelle à intérêts composés

5.1. Définition

La valeur actuelle est la somme qu'il faut placer maintenant à intérêts composés pour obtenir Cn après n périodes de placement .C'est le processus inverse de la capitalisation : c'est l'actualisation.

Capitalisation

0 $\longrightarrow$ n

C_0 $\qquad$ $C_n = C_0(1+i)^n$

Actualisation

0 $\longleftarrow$ n

$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$ $\qquad$ C_n

Application :

Quelle somme faut-il placer maintenant à intérêts composés au taux annuel de 7% pour obtenir dans 4ans une valeur acquise de 75 000 dhs ?

Solution : On a $C_n = 75\,000 dhs$ $\quad i = 0,07$ $\quad n = 4\ ans$

$C_0 = C_n(1+i)^{-4}$ $\quad$ A.N : $C_0 = 75\,000(1+0{,}07)^{-4} = 57217{,}14\ dhs$

LES ANNUITES

Les annuités s'intéressent à deux types de problèmes , soit une constitution d'un capital par versement régulier d'un somme d'argent (capital retraite, capital éducation) ,soit le remboursement d'un crédit par des versements réguliers (souvent, les capitaux empruntés sont remboursés par une série de paiements échelonnés et non pas par un versement global).

1. <u>DEFINITION</u> :

On appelle annuité des sommes payables à intervalle de temps régulier. Dans le cas des annuités les sommes sont versées chaque année à la même date, la période retenue est l'année. On peut cependant effectuer des versements chaque semestres, on parle alors de semestrialités, chaque trimestre, il s'agit alors de trimestrialités, ou chaque mois ceux sont alors des mensualités .Le versement d'annuité a pour objet soit de rembourser une dette, soit de constituer un capital.

2. <u>ANNUITE CONSTANTE DE FIN DE PERIODE, CAS DE LA CONSTITUTION D'UN CAPITAL</u>

Ici les sommes sont payables à la fin de chaque période et elles sont constantes. Dans certains cas, les versements ou les règlements ne sont pas d'un montant identique, mais variable et les calculs sont un peu compliqués. Si les annuités sont variables, elles ne peuvent être résumées en formules que si elles suivent une loi mathématique : progression géométrique ou arithmétique.

Soit a le montant de l'annuité constante, n le nombre d'annuités (nombre de versements effectués), A_n la valeur acquise au moment du versement de la dernière annuité et i le taux.

Le premier versement génére une valeur acquise : $a(1+i)^{n-1}$, le second : $a\ (1+i)^{n-2}$….. et le dernier a

Donc la valeur acquise totale générée par tous les versements est : $\mathrm{A_n}= a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \cdots a$
soit $\mathrm{A_n} = a[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots 1]$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison$(1+i)$)

Alors $\mathrm{A_n} = a\ \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = a\ \frac{(1+i)^n-1}{i}$

<u>Applications</u> :

1. a. Calculez la valeur acquise au moment du dernier versement d'une série de 10 annuités constantes de fin de période de 17 500 dhs chacune .Capitalisation annuelle, taux : 8% l'an.

b. Calculez la valeur acquise de cette même série 7 mois après le dernier versement.

c. Calculez la valeur acquise de cette même série 1an et 9 mois après le dernier versement.

2. Quelle somme constante faut-il verser chaque année à la même date pour constituer en 12 versements 2 ans après le dernier versement un capital de 500 000 dhs. Taux : 8% l'an.

3. Calculez un mois après le dernier versement la valeur acquise par une suite de 72 mensualités de 2500 dhs chacune, taux : 7% l'an.

Solution : 1.a. On a $a = 17\,500\ dhs$ $t = 8\%$ $i = 0{,}08$ $n = 10$ $An = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

A.N : $A_{10} = 17\,500\ \frac{(1+0{,}08)^{10}-1}{0{,}08} = 253\,514{,}84$ dhs

b. La capitalisation est annuelle (la période est l'année) ,7 mois est un nombre fractionnaire de période .On a alors $k = 0\ et\ \frac{p}{q} = \frac{7}{12}$

Solution rationnelle : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^k(1+\frac{p}{q}\times i)$ A.N : $C_{0+\frac{7}{12}} = A_{10}(1+0{,}08)^0(1+\frac{7}{12}\times 0{,}08)$

$= 253\,514{,}84\ \left(1+\frac{7}{12}\times 0{,}08\right) = 265\,345{,}53$ dhs

Solution commerciale : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$ A.N : $C_{0+\frac{7}{12}} = 253\,514{,}84\ (1+0{,}08)^{0+\frac{7}{12}} = 265\,155{,}46$ dhs

c. La capitalisation est annuelle : (la période est l'année) ; 1an et 9 mois est un nombre fractionnaire de période ; on a alors $k = 1\ et\ \frac{p}{q} = \frac{9}{12}$

Solution rationnelle : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^k(1+\frac{p}{q}\times i)$

A.N : $C_{1+\frac{9}{12}} = 253\,514{,}84\ (1+0{,}08)^1\left(1+\frac{9}{12}\times 0{,}08\right) = 290223{,}79\ dhs$

Solution commerciale : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$ A.N : $C_{1+\frac{9}{12}} = 253\,514,84\ (1+0{,}08)^{1+9/12} = 290\,064,75\ dhs$

2. $A_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$ A.N: $A_{12} = a\frac{(1+0{,}08)^{12}-1}{0{,}08}$ et $500\,000 = A_{12}(1+0{,}08)^2$

Donc $500\,000 = a\frac{(1+0{,}08)^{12}-1}{0{,}08}(1+0{,}08)^2$ d'où $a = \frac{500\,000}{\frac{(1+0{,}08)^{12}-1}{0{,}08}(1+0{,}08)^2} = 22\,588{,}74\ dhs$

3. On a $a = 2\,500\ dhs$ $t = 7\%$ $i = 0{,}07$ $n = 72\ mensualités$

Les versements sont mensuels donc la période est le mois or le taux est annuel ; il faut donc convertir le taux annuel en un taux mensuel :

Taux proportionnel : $i_m = \frac{i_a}{12}$ $soit\ \ i_m = \frac{0{,}07}{12} = 0{,}0058333333$

Taux équivalent : $(1+ia)^1 = (1+im)^{12}$ soit $\sqrt[12]{1+i_a} - 1 = im$ d'où $im = 0,0056541453$

$A_{72} = a\frac{(1+im)^{72}-1}{im}$ $A_{72} = 2\,500\frac{(1+im)^{72}-1}{im}$ $C = A_{72}\ (1+im)$ $C = 2\,500\frac{(1+im)^{72}-1}{im}(1+im)$

Avec le taux proportionnel : $C = 2\,500\frac{(1+0{,}0058333333)^{72}-1}{0{,}0058333333}\ (1+0{,}0058333333) = 224\,202{,}62\ dhs$

Avec le taux équivalent : $C = 2\,500\frac{(1+0{,}0056541453)^{72}-1}{0{,}0056541453}\ (1+0{,}0056541453) = 222\,651{,}49\ dhs$

3. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période cas de remboursement d'une dette

$A_0 \longrightarrow An = a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$

$$A_0 = An(1+i)^{-n} = a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)^{-n} \qquad A_0 = a\,\frac{(1+i)^n(1+i)^{-n}-(1+i)^{-n}}{i}$$

Donc la formule des annuités en remboursement d'une dette s'écrit :

$$A_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Remarque:

Cette formule n'est utilisable telle quelle que si le premier versement s'effectue une période après la date du contrat qui correspond à la " la prise du crédit". La valeur actuelle A_0 est évaluée une période avant le premier versement, c'est-à-dire à a période 0 tandis que le premier versement est effectué la période 1.On parle alors d'annuités immédiates. Dans le cas contraire, on parlera de remboursement différé.

Application : Une dette de 300 000 dhs est remboursable en 20 trimestrialités constantes, le premier versement dans 3 mois, taux 9% l'an.

1) Calculez la trimestrialité de remboursement

2) Reprendre l'exemple avec le premier versement dans 6 mois.

Solution : 1) Le taux donné est annuel hors nous avons des trimestrialités donc il faut convertir le taux annuel en taux trimestriel.

Taux proportionnel : $i_t = \frac{i_a}{4} = \frac{0{,}09}{4} = 0{,}0225$

Taux équivalent : $(1+it)^4 = 1+ia \qquad it = \sqrt[4]{1+ia} - 1 \qquad it = 0{,}02177818$

Avec le taux proportionnel : $A_0 = a\frac{1-(1+it)^{-n}}{i} \qquad 300\,000 = a\,\frac{1-(1+0{,}0225)^{-20}}{0{,}0225}$

$$a = \frac{300\,000 \times 0{,}0225}{1-(1+0{,}0225)^{-20}} = 18\,792{,}62\ dhs$$

Avec le taux équivalent : $A_0 = a\frac{1-(1+it)^{-n}}{i} \qquad A_0 = a\,\frac{1-(1+0{,}02177818)^{-20}}{0{,}02177818}$

$$a = \frac{300\,000 \times 0{,}02177818}{1-(1+0{,}02177818)^{-20}} = 18663{,}35\ dhs$$

2) le premier versement s'effectue 6 mois après la date du contrat : soit 2 trimestres après la date du contrat. Donc nous avons un différé d'un trimestre.

$300\,000 = A_0(1+i)^{-1} \qquad 300\,000 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-1}$ soit $a = \frac{300\,000 \times i}{(1-(1+i)^{-n})(1+i)^{-1}}$

avec le taux proportionnel : $a =$ 19 215,45 dhs ; avec le taux équivalent : $a =$ 19 069,87 dhs

AMORTISSEMENT DES EMPRUNTS INDIVIS

1. DEFINITION :

L'emprunt indivis se caractérise par le fait que l'emprunteur (un particulier ou une entreprise) s'adresse à un seul créancier. Le nominal C de la dette n'est pas divisé. L'emprunt indivis s'oppose alors à l'emprunt obligataire : l'emprunteur, l'état ou une grande entreprise recourt à une multitude de créanciers .Le nominal C de la dette est divisé en titres.

2. NOTION D'AMORTISSEMENT DES EMPRUNTS INDIVIS

Les emprunts sont remboursés à l'aide d'annuités. Les annuités comportent une partie constituée des intérêts dus et une partie constituée par le remboursement du capital prêté : c'est l'amortissement.

3. AMORTISSEMENT PAR ANNUITES CONSTANTES, CONSTRUCTION D'UN TABLEAU D'AMORTISSEMENT

Dans un tableau d'amortissement, on présente les états successifs de la dette et des intérêts, période par période.
On commence par calculer l'annuité constante de remboursement a.Comme l'annuité est constante et que le capital est progressivement remboursé, la part des intérêts diminue dans l'annuité et la part de l'amortissement augmente.
Pour la première ligne du tableau, on commence par calculer l'intérêt $I1$ .Par soustraction de $a - I1$, on obtient le premier amortissement $M1$ que l'on déduit du capital initial. On dispose maintenant de la dette au début de la deuxième période ce qui permet de commencer la deuxième ligne et ainsi de suite.

Application :

Une personne emprunte 350 000 dhs auprès d'une banque et s'engage à verser 8 annuités constantes la première payable un an après la date du contrat .Sachant que $T = 12\%$ l'an, constituer le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré :

$a = \frac{A_0 \times i}{1-(1+i)^{-n}}$ A.N : $a = \frac{350\ 000 \times 0,12}{1-(1+0,12)^{-8}} = 70\ 455,99 dhs$

Année	Capital en début de période	intérêts	Annuité	amortissement	Capital en fin de période
1	350 000	35000× $0,12$ =42000	70455,99	70455,99-42000=28455,99	350 000-28455,99 =321544,01
2	321544,01	38585,28	70455,99	31870,71	289673,29
3	289673,29	34760,79	70455,99	35695,2	253978,09
4	253978,09	30477,37	70455,99	39978,61	213999,47
5	213999,48	25679,93	70455,99	44776,06	169223,41
6	169223,42	20306,81	70455,99	50149,17	119074,23
7	119074,25	14288,91	70455,99	56167,09	62907,14
8	62907,17	7548,86	70455,99	62907,14	0

4. CALCUL DE L'AMORTISSEMENT DE RANG QUELCONQUE

Les amortissements étant en progression géométrique de raison $(1+i)$, lorsqu'on connait le rang de l'amortissement, on connait son montant, à l'aide de la formule générale :

$$M_k = M_1(1+i)^{k-1}$$

5. CALCUL DE L'INTERET DE RANG QUELCONQUE

Lorsqu'on connaît, ou lorsqu'on a calculé l'amortissement de rang k, comme l'intérêt I_k est égal à la différence entre l'annuité et l'amortissement de rang k, il vient que : $I_k = a - M_k$

6. CALCUL DU CAPITAL A REMBOURSER APRES LE PAIEMENT DE L'ANNUITE DE RANG K

Si le capital à rembourser est C_k et le montant déjà rembourser est R_k, on peut écrire :$C_k = C - R_k$ où C est le capital à rembourser.

TRAVAUX DIRIGES

TD N°1 : LES INTERETS SIMPLES

Exercice 1 : questions pour faire le point :

a. Quels sont les paramètres qui caractérisent le calcul d'intérêts ?

b. Quelle est la formule générale de calcul des intérêts simples annuels ?

c. Donnez une définition de la valeur acquise d'un capital placé à intérêts simple.

d. Indiquez précisément comment on calcule la durée s'écoulant du 23 avril 2017 au 18 aout 2017?

Exercice 2 : calculez l'intérêt simple rapporté par un capital de 6000 dhs placé à 10% annuel pendant 3 ans .Faire le même calcul pour la même capital placé pendant 8 mois et pour le même capital placé pendant 144 jours.

Exercice 3: un capital C a rapporté 357,28 Dhs d'intérêts placé à 5% annuel pendant 145 jours .Quel est le montant de ce capital C ?

Exercice 4 : un capital de 4 000 Dhs placé pendant 1an et 228 jours a rapporté un intérêt total de 457,33 Dhs .A quel taux était-il placé ?

Exercice 5 : Monsieur El Mouden ne se souvient plus depuis combien de temps il a placé ses économies ; l'extrait de compte de sa banque indique simplement qu'elles étaient de 12500 Dhs , qu'elles étaient placé à 3,5% par an et qu'elles lui ont rapporté un intérêt de 888,88 Dhs .Aidez- le à trouver la réponse .

Exercice 6 : une personne place les $\frac{4}{7}$ de son capital à 10,5% l'an pendant 8 mois et le reste à12% pendant 14 mois. La première partie lui rapporte 140 000 Dhs d'intérêts.

a) Quel est le montant de chaque placement ?
b) Calculez l'intérêt total dégagé par ces deux placements ?
c) Déterminez le taux moyen de placement et donnez sa signification ?

Exercice 7 : un capital C placé à 10% annuel pendant une certaine durée a acquis une valeur de 240 000 Dhs. Si on avait placé ce même capital Cà 12% pendant un an de moins, il aurait fourni un intérêt de 24 000 Dhs.

Calculez le capital C et la durée de placement.

Exercice 8 : après avoir placé un capital C pendant une certaine durée au taux annuel de 9% une personne retire 44 205 Dhs (capital et intérêts réunis) .Si elle avait placé le même capital C pendant la même durée à 8%, elle aurait retiré 43960 Dhs (capital et intérêts réunis).

Calculez le capital C et la durée de placement.

Exercice 9 : un capital C placé à 6% l'année pendant un certain nombre de jours rapporte 227,50 Dhs d'intérêt. Mais s'il était placé à 9% pendant 10 jours de plus il pourrait rapporter 393,75 Dhs .

Trouvez le capital C et la durée de placement.

SOLUTION:

Exercice1

a. Les paramètres qui caractérisent le calcul des intérêts simples sont : le montant du capital C, le taux d'intérêt T et la durée de placement n.

b. La formule générale de calcul des intérêts simples annuels est : $I = \frac{CnT}{100}$

c. La valeur acquise est la somme des intérêts reçus et le capital initial : $Va = C + I$

d. On calcule la durée qui s'écoule du 23 avril 2017 au 18 aout 2017 comme suit :

Avril : 30-24+1 jours mai : 31 jours juin : 30 jours juillet 31 jours aout : 18 jours

Donc la durée est 7+31+30+31+18=117 jours

Exercice 2 : $I_1 = \frac{cnT}{100}$ $AN\colon I_1 = \frac{6000\times10\times3}{100} = 1800\ dhs$; $I_2 = \frac{cmT}{1200}$ $A.N\colon I_2 = \frac{6000\times10\times8}{1200} = 400\ dhs$;

$$I_3 = \frac{cjT}{36000} \qquad A.N\colon \quad I_3 = \frac{6000\times10\times144}{36000} = 240\ dhs$$

Exercice 3:

On sait que $I = \frac{cjT}{36000}$ d'où $\frac{C\times5\times145}{36000} = 357{,}28$ d'où $C = \frac{357{,}28\times36000}{5\times145}$ donc $C = 17\ 740{,}80\ Dhs$

Exercice 4

On sait que $I = \frac{cjT}{36000} = \frac{4000\times588T}{36000} = 457{,}33$ $d'où$ $T = \frac{457{,}33\times36000}{4000\times588}$ soit $T = 7\%$

Exercice 5:

L'intérêt annuel est : $I = \frac{CnT}{100} = \frac{12\ 500\times n\times3{,}5}{100} = 888{,}88\ Dhs$

Donc la durée de placement est $n = \frac{888{,}88\times100}{12500\times3{,}5} = 2{,}0317\ ans \quad soit \quad 2ans\ et\ 12\ jrs$

Exercice 6:

On a $C = C1 + C2$ $C1 = \frac{4}{7}\times C$ $C2 = \frac{3}{7}\times C$ $m1 = 8$ $m2 = 14$ $I1 = 140\ 000$

$$\mathrm{T1} = 10{,}5\% \qquad \mathrm{T2} = 12\%$$

a) $\mathrm{I1} = \frac{C1m1T1}{1200}$ $d'où$ $C1 = \frac{1200\times I1}{m1T1}$

A.N : $C1 = \frac{1200\times140000}{8\times10{,}5} = 2\ 000\ 000\ dhs$

$C1 = 4/7C$ donc $C = \frac{7}{4}\,C_1$ $d'où$ $C = \frac{7}{4}\times 2\ 000\ 000 = 3\ 500\ 000\ Dhs$

$C2 = 3/7\,C$ donc $C2 = \frac{3}{7}C = \frac{3}{7}\times 3\ 500\ 000 = 1\ 500\ 000\ Dhs$

b) $It = I1 + I2$

$It = 140\,000 + \frac{C2m2T2}{1200} = 140\,000 + \frac{1\,500\,000 \times 14 \times 12}{1200} = 350\,000\ Dhs$

c) $Tm = \frac{C\,1m1T1 + C2m2T2}{C1m1 + C2m2}$ $\quad A.N: \quad Tm = \frac{2\,000\,000 \times 8 \times 10{,}5 + 1\,500\,000 \times 14 \times 12}{2\,000\,000 \times 8 + 1\,500\,000 \times 14} = 11{,}35\%$

Signification de Tm : au lieu de place $C1$ à 10,5% $et\ C2$ à 12% on peut placer les deux capitaux 11,35% et on obtiendra le même intérêt total.

Exercice 7

On a : $C \quad T1 = 10\% \quad n \quad alors \quad Va = 240\,000\ Dhs$

$C \quad T2 = 12\% \quad n - 1 \quad alors \quad I2 = 24000\ Dhs$

On exprime : $Va = C + I = C + \frac{cnT1}{100} = 240\,000$ et $I2 = \frac{C(n-1)T2}{100} = 24000$

On aboutit à un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} C + \frac{Cn \times 10}{100} = 240\,000 \\ \frac{C(n-1) \times 12}{100} = 24\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(1 + n/10) = 240\,000 \\ \frac{C(n-1) \times 12}{100} = 24\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{c}(1+\mathrm{n}/10)}{\frac{C(n-1)\times 12}{100}} = \frac{240\,000}{24\,000} \\ \frac{C(n-1) \times 12}{100} = 24\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100+10n}{12(n-1)} = 10 \\ \frac{C(n-1) \times 12}{100} = 24\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 + 10n = 120n - 120 \\ C\,(n-1) = \frac{24\,000 \times 100}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 220 = 110n \\ C = \frac{200000}{n-1} \end{cases}$$

d'où $n = 2\ et\ C = 200000\ Dhs$

Exercice 8:

On a $C =? \quad T1 = 9\% \quad j = \ ? \quad Va1 = 44205\ dhs$

$C = \ ? \quad T2 = 8\% \quad j = \ ? \quad Va2 = 43960\ dhs$

Donc $Va1 = C + I1 = C + \frac{CJT1}{36000} = 44205$ et $Va2 = C + I2 = C + \frac{CJT2}{36000} = 43960$

$$\begin{cases} C + \frac{CJt1}{36000} = 44205 \\ C + \frac{CJt2}{36000} = 43960 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\,(1 + \frac{9j}{36000}) = 44\,205 \\ C\,(1 + \frac{8j}{36000}) = 43960 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{C(1+\frac{9j}{36000})}{C(1+\frac{8j}{36000})} = \frac{44\,209}{43\,960} = \frac{36000+9j}{36000+8j} \\ \end{cases}$$

D'où $J = 210\ jours \quad et \quad C = 42000dhs$

<u>Exercice 9</u>

On a :

$C = ? \quad t = 6\% \quad j \quad I1 = 227{,}5dhs$

$C = ? \quad t = 9\% \quad j + 10 \quad I2 = 393,75dhs$

$I1 = \frac{cjt}{36000} = \frac{C \times J \times 6}{36000}$ et $I2 = \frac{cjt}{36000} = \frac{C \times (10+J) \times 9}{36000}$

$$\begin{cases} \frac{C \times J \times 6}{36000} = 227,5 \\ \frac{C \times (10+J) \times 9}{36000} = 393,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{C \times J \times 6}{36000}}{\frac{C \times (10+J) \times 9}{36000}} = \frac{227{,}5}{393{,}75} \\ \frac{C \times (10+J) \times 9}{36000} = 393{,}75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6j}{(10+j) \times 9} = \frac{227{,}5}{393{,}75} \\ C = \frac{393{,}75 \times 36000}{(10+j) \times 9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = 65\ jours \\ C = 21\ 000dhs \end{cases}$$

<u>Exercice 10</u> : La valeur acquise par un capital placé à un certain taux est toujours égal à ?

Rép : sa valeur initiale augmentée des intérêts produits.

<u>Exercice 11</u> : La valeur acquise par un capital de 2000 dhs placé à intérêts simples calculés à 3% est égal au bout d'un certain temps à 2 040 dhs .La durée du placement est égale à ?

Rép : 8 mois

<u>Exercice 12</u> : Un capital de 3 650 dhs est placé à 6% du 21 mars 2017 au 17 septembre 2017 les intérêts simples produits sont égaux à ?

Rép : 109,50 dhs

<u>Exercice 13</u> : Un capital de 9000 dhs est placé à 8,5% du 1 er janvier au 31 décembre 2017, sa valeur acquise est égale à ?

Rép : 9 773,5 dhs

<u>Exercice 14</u> : Un capital de 7 500 dhs est placé pendant 3 mois et rapporte 70 dhs d'intérêts le taux de placement est égal à ?

Rép : 3,74%

Exercice 15 : Un individu dépose aux dates suivantes les montants suivants

Le 15/05/2019 80 000 dhs

Le 26/08/2019 120 000 dhs

Au 10/01/2020 on arrive à une valeur acquise de 205 940 dhs

Calculer le nombre de jours du 1er placement ? Calculer le nombre de jours du 2éme placement ?

Quel est le taux de placement (intérêts simples) ?

Solution : $j1 = 240 \ jours$ et $j2 = 137 \ jours$

Le taux de placement T est donné par : $205\,940 = 80\,000 + \frac{80\,000 \times 240 \times T}{36000} + 120\,000 + \frac{120\,000 \times 137 \times T}{36000}$

Soit $T = 6\%$

Exercice 16 :

Trois capitaux sont placés à intérêts simples le 15 mai de l'année A mais à des conditions différentes : le 1er de 2088 dhs à 8,5% jusqu'au 17 juin de l'année A, le 2éme de 1 472 dhs à 6,4% jusqu'au 15 juillet de l'année A et le 3éme de 3 435 dhs à 5,5% jusqu'au 18 août de l'année A.Calculer le taux moyen de placement .

Solution : On a $j1 = 33 \ jours$ $j2 = 61 \ jours$ $j3 = 95 \ jours$

$$t_m = \frac{C_1 J_1 t_1 + C_2 J_2 t_2 + C_3 J_3 t_3}{c_1 j_1 + c_2 j_2 + c_3 j_3}$$

$$t_m = \frac{2088 \times 33 \times 8.5 + 1472 \times 61 \times 6{,}4 + 3435 \times 95 \times 5{,}5}{2088 \times 33 + 1472 \times 61 + 3435 \times 95}$$

$$t_m = \frac{2955140{,}3}{485021} = 6.09\%$$

Exercice 17 : On place au 15/05/2017 et au 26/06/2017 les sommes de 125 000 dhs et 175 000 dhs à intérêts simples. Au 10/09/2017, on se retrouve avec une valeur acquise de 307 012,5 dhs. Trouvez le taux.

Solution : On a $C1 = 125\,000 \ Dhs$ $J1 = 118 \ jours$ $C2 = 175000 \ dhs$ $J2 = 76 jours$ $Va = 307\,012{,}5 \ Dhs$

$Va = Va1 + Va2$ donc $307\,012{,}5 = (C1 + I1) + (C2 + I2)$

$307\,012{,}5 = \left(125\,000 + \frac{125\,000 \times 118 \times t}{36000}\right) + \left(175\,000 + \frac{175\,000 \times 76 \times t}{36000}\right)$

$$307\,012{,}5 \times 36000 - (125\,000 + 175\,000) \times 36000 = 125\,000 \times 118 \times t + 175\,000 \times 76 \times t$$

Donc $t = \frac{307\,012{,}5 \times 36000 - (125\,000 + 175\,000) \times 36000}{125\,000 \times 118 + 175\,000 \times 76}$ Alors $t = 9\%$

TD N°2 : L'ESCOMPTE

Exercice 1 : un effet de 1 500 dhs au 20 juin 2017 est escompté le 21 mars 2017 à 8% l'an. Sa valeur actuelle est égale à ?

rép : 1 469,67dhs

Exercice2 : un effet de 2 500 dhs au 16 mai 2017 est escompté le 21 mars 2017 à 7% sa valeur actuelle est égale à ?

rép: 2472,78 dhs

Exercice 3 : un effet de 850 dhs escompté à 7,5% le 21 mars 2017 a une valeur actuelle de 834,95 dhs sa date d'échéance est le ?

rép: 14 juin 2017

Exercice 4 : un effet au 20 mai 2017 escompté le 21 mars 2017 à 5,5% a une valeur actuelle de 4954,17 dhs.Le nominal de cet effet est égal à ?

rép: 5000 dhs

Exercice 5 : un effet de 4000 dhs au 25 mai 2017 et un effet de 3000 dhs au 12 juillet 2017 sont remplacés le 21 mars 2017 par un effet unique au 25 juin 2017.Sachant que le taux d'escompte est égal à 7% le nominal de l'effet de remplacement est égal à ?

Rép : 7 014,46 dhs

Exercice 6 : un effet de 4 800 dhs au 15 mai 2017 et un effet de 2400 dhs au 20 juillet 2017 sont remplacés le 21 mars 2017 par un effet unique de 7200 dhs.La date d'échéance de l'effet de remplacement est le ?

rép : 06 juin 2017

Exercice 7 : le 10/06 un particulier présente 3 effets à l'escompte. La banque lui remet la même somme pour chacun d'eux. Le premier est de 7250 dhs au 16/07 , le deuxième est de 7323,98 dhs au 21/08 et le troisième est de7342,71dhs.

a) Déterminez le taux d'escompte.

b) Calculez la somme totale remise par la banque au client.

c) Quelle est l'échéance du troisième effet ?

Solution :

a) on a $j1 = 36\,jrs$ $\quad j2 = 72\,jrs$ $\quad j3 = ?$

et on sait que les 3 effets ont la même valeur actuelle (la banque remet la même somme pour chacun des effets escomptés) donc $Va1 = Va2 = Va3$

Donc $v1 - \frac{v1j1T}{36000} = v2 - \frac{v2j2T}{36000}$ soit $7250 - \frac{7\,250 \times 36 \times T}{36000} = 7323{,}98 - \frac{7323{,}98 \times 72 \times T}{36000}$

D'où $T = 10\%$

b) $va1 = 7\,250 - \frac{7\,250 \times 36 \times 10}{36\,000} = 7177{,}5\ Dhs$

Donc la somme remise par la banque est égale à 3×7177,5 dhs car la banque remet la même somme pour chacun des effets. Donc Va totale =21532,5 dhs

c)L'échéance du troisième effet j3 est donnée par $va3 = 7342{,}71 - \frac{7342{,}71 \times j3 \times 10}{36000}$

$$7342{,}71 - \frac{7342{,}71 \times j3 \times 10}{36000} = 7177{,}5 \quad soit \quad J3 = 81jrs$$

Donc l'échéance du troisième effet se situe 81 jours après le 10 juin, soit le 30 août de la même année.

Exercice 8

Effet	Valeur	Date d'échéance
1	25 000	18/10/2016
2	30 000	15/09/2016
3	55 000	28/11/2016

Un effet de 110 000 dhs a été fait en remplacement des trois effets précédents

Quelle est sa date d'échéance si le taux d'escompte est de 10%?

Solution : $j = 122\ jours$, l'échéance correspondante est le 30/10/2016

TD N° 3 : LES INTERETS COMPOSES

Exercice 1 : Quel est le taux mensuel équivalent à 9% annuel ?

Rép: 0,72 %

Exercice 2 : Quel est le taux annuel équivalent au taux trimestriel de 2,5% ?

Rép : 10,38%

Exercice 3 : quelle est la valeur acquise par un capital de 1400 dhs placé à intérêts composés au taux annuel de 6% après de 3 ans et 4 mois de placement si la capitalisation est annuelle ?(Solution commerciale)

Rép : 1700,11 dhs

Exercice 4 : un capital placé à 7% a acquis une valeur de 1250 dhs au bout de 4 ans et 6 mois de placement.La capitalisation des intérêts est annuelle .Quel est le montant de ce capital ?

Rép : 921,9 dhs

Exercice 5 : un capital de 4500 dhs placé à intérêts composés pendant 8 ans et 3 mois a acquis une valeur de 6 400 dhs .A quel taux est placé ce capital ?

Rép : 4,36%

Exercice 6 : Un capital de 2000 dhs est placé à intérêts composés au taux de 8,5% au bout de combien de temps aura- t-il acquit une valeur de 3132,56 dhs ?

Rép : 5 ans 6 mois

Exercice 7 : Au bout de combien de temps un capital de 4 458 789 125 456 890 147 456 123 250,25 dhs placé à 3% double-t-il ?

Rép : 23 ans 5 mois 12 jours

Exercice 8 : Quel est le taux mensuel équivalent à 6% semestriel ?

Rép : 0 ,976%

Exercice 9 : Un capital de 10 000 DHS est placé pendant 7 ans à intérêts composés les 4 premières années le taux est de 4% l'an les 3 semestres suivants le taux est de 3, 5% l'an et le reste du temps le taux est égal à 4,6% l'an.Quelle est la valeur acquise par ce capital au terme de son placement ? (On utilisera la solution commerciale) (Capitalisation annuelle des intérêts)

Rép : 10000$(1+0{,}04)^4(1+0{,}035)^{1{,}5}\ (1+0{,}046)^{1{,}5} =$ 13 177,75 Dhs

Exercice 10 : Quel est le taux semestriel équivalent à 2,45% trimestriel ?

Rép, : 4,96%

Exercice 11: Pour une dette contractée il y a 6 ans, un particulier doit actuellement versé 250 000dhs. Deux solutions lui sont offertes dans le contrat initial : rembourser par anticipation à la fin de la quatrième année ou demander une prorogation de 2ans.(taux annuel 10%)

a) Quelle somme doit il verser à la date 4 ?

b) Quelle somme doit il verser à la date 8 ?

c) Calculez le montant de crédit qui lui a été ?

Solution: a) On a $C_6 = 250\ 000\ dhs$ $\quad on\ sait\ que \quad Co = Cn(1+i)^{-n}$
donc $C_4 = C_6(1+i)^{-2}$ $\quad A.N: C_4 = 25000(1+0{,}1)^{-2} = 206611{,}57\ dhs$

b) à la date 8 : $C_8 = C_6(1+i)^2$ A.N : $C_8 = 250\ 000(1+0{,}1)^2 = 302500 dhs$

c) $Co = C_6(1+i)^{-6}$ $\quad A.N: Co = 250\ 000(1+0{,}10)^{-6} = 141\ 118{,}48\ dhs$

Exercice 12: Soit un capital de 34 160 dhs capitalisé tous les trois mois pendant 8ans au taux annuel de 7,44%. A la fin de la 8 éme année, quel est le montant total de la valeur acquise ?

Rep : avec le taux proportionnel : 61607,75 dhs; avec le taux équivalent : 60652,10 dhs

Exercice 13 : Un capital de 142857dhs est placé à 3,5% l'an à intérêts composés et il est capitalisé annuellement, calculer sa valeur acquise au bout de 6ans, 12 ans et 18 ans ;

Solution : on a $C = 142\ 857\ dhs$ placé à 3,5% à intérêts composés et il est capitalisé annuellement

Sa valeur au bout de 6 ans : $c_6 = c_0(1+i)^6$ $\quad A.N: c_6 = 142\ 857(1+0{,}035)^6 = 175\ 609{,}73\ dhs$

Sa valeur au bout de 12 ans : $c_{12} = c_0(1+i)^{12}$ A.N :$c_{12} = 142\ 857(1+0{,}035)^{12} = 215\ 866{,}74\ dhs$

Sa valeur au bout de 18 ans :$c_{18} = c_0(1+i)^{18}$ A.N :$c_{18} = 142\ 857(1+0{,}0315)^{18} = 265\ 355{,}33\ dhs$

Exercice 14 : Soit un capital de 6 174 Dhs capitalisé tous les 6mois pendant 15 ans au taux semestriel de 5,4%.A la fin de la 15 éme année, quel est le montant total des intérêts reçus ?

Solution : à la fin de la 15éme année le montant total des intérêts reçus est :

La capitalisation est effectuée tous les 6 mois : en 15 ans il y a 30 semestrialités

Valeur acquise au bout de 15 ans :$c_{15} = c_0(1+i)^{30}$ A.N :$c_{15} = 6\ 174(1+0{,}054)^{30} = 29\ 907{,}83 dhs$

Intérêts reçus en 15 ans : $29\ 907{,}83 - 6\ 174 = 23\ 733\ {,}83\ dhs$

Exercice 15 : Un capital de 27 182 dhs est capitalisé tous les trimestres pendant 8 ans au taux annuel de 14,24%. Calculer sa valeur acquise et le montant des intérêts reçus à la fin de la 8 éme année ;(taux équivalent, taux proportionnel).

Solution : calcul au taux proportionnel : taux trimestriel $i_t = \frac{0{,}1424}{4} = 0{,}0356$

Valeur acquise au bout de 8 ans : $27\ 182 \times (1+i_t)^{32} = 27\ 182 \times (1+0{,}0356)^{32} = 83\ 258{,}15\ dhs$

Intérêts reçus en 8 ans : $83\,258{,}15 - 27\,182 = 56\,076{,}15\ dhs$

Calcul au taux équivalent : taux trimestriel :$i_t = (1 + 0{,}1424)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}0338428977$
Valeur acquise au bout de 8 ans : $27\,182 \times (1 + 0\,,0338428977)^{32} = 78\,854{,}59\ dhs$

Intérêts reçus en 8 ans : $78\,854{,}59 - 27\,182 = 51\,672{,}59\ dhs$

Comme le taux équivalent est inférieur au taux proportionnel, les intérêts sont plus faibles.

Exercice 16 : Un placement à intérêts composés d'une somme de 250 000 Dhs est complété 3ans après par un autre dépôt de 150 000 Dhs le taux de placement est de 11% l'an, capitalisation annuelle des intérêts .De quelle somme d'argent dispose- t -on 3ans après le dépôt ?

Solution :première méthode : 250 000 après 3ans de placement rapporte une valeur acquise de :
$250\,000(1 + i)^3 = 341\,907{,}75 dhs$

A la fin de la troisième année on aura en compte : $341\,907{,}75 + 150\,000 = \ 491\,907{,}75$

3ans après an aura une valeur acquise de :$(491907{,}75)(1 + i)^3 = 672\,748{,}29\ dhs$

Deuxième méthode :$250\,000(1 + i)^6 + 150\,000(1 + i)^3 = 467\,603{,}64 + 205\,144{,}65 = 672\,748{,}29\ dhs$

Exercice 17: Soit un capital de 30 000 dhs , capitalisé tous les ans .durée totale de capitalisation : 12 ans et 6 mois à 6% l'an .Quelle est la valeur acquise en fin de contrat ? On utilisera la solution commerciale.

Solution : Valeur acquise au bout de 12 ans et 6 mois :$30\,000 \times 2{,}071683 = 62150{,}49\ dhs$

Exercice 18 : soit un capital de 15 000 dhs, capitalisé tous les ans pendant 10 ans .A la fin de la 10éme année, le montant total de la valeur acquise est $C_{10} = 23\,857{,}86\ dhs$ .A quel taux le capital a-t-il été placé ?

Solution : On a 10 ans de placement .Comme $C_n = C_0 \times (1 + i)^n$,

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C_0}\ soit \qquad (1 + i)^{10} = \frac{23\,857{,}86}{15\,000} = 1{,}590524$$

Le taux = 4,75% .

Exercice 19 :Un capital placé à 8% l'an à intérêts composés aura une valeur de 125 300 dhs dans 10 ans. Quelle est sa valeur actuelle ? Quel est le montant des intérêts qu'il aura rapporté ?

Valeur acquise $C_{10} = 125\,300$ dhs

Valeur actuelle = $C_{10} \times (1 + 0{,}08)^{-10} = 125\,300 \times (1{,}08)^{-10} = 58\,038{,}14\ dhs$

I =$C_n - C_0$ I=*67261,86 dhs*

Exercice 20 :Un investisseur a placé un capital de 100 000 dhs dans une banque il veut que celui-ci double en 5 ans .Quel doit être le taux de placement ?s'il se contentait d'un doublement en 10ans ; quel serait le taux de placement ?

Solution : Doublement en 5ans : $C \times (1 + i)^5 = 2 \times C$ soit $(1 + i)^5 = 2$ ou encore $1 + i = \sqrt[5]{2}$ soit
$i = 0{,}1487$ donc $T = 14{,}87\%$

Doublement en 10 ans : $C \times (1+i)^{10} = 2$ soit $(1+i)^{10} = 2$ donc $1+i = \sqrt[10]{2}$ soit $i = \sqrt[10]{2} - 1$ donc $i = 0{,}0718$ soit $T = 7{,}18\%$

Exercice 21 : deux capitaux dont la somme est 100 000 dhs sont placés l'un à intérêts simples aux taux de 8% l'an, l'autre à intérêts composés au taux de 7% l'an pendant 4ans.Ils ont acquis la même valeur. Quels sont ces deux capitaux ?

Solution : $C1$ à intérêts simples $T1 = 8\%$, $n = 4$, $C2$ à intérêts composés $i = 0{,}07$, $n = 4$ et $C1 + C2 = 100\,000\ Dhs$

Les deux capitaux ont la même valeur acquise donc $va1 = va2$ soit : $C1 + \frac{C1nT1}{100} = C2(1+i)^n$

$$C1 + \frac{C1 \times 4 \times 8}{100} = C_2(1+0{,}07)^4 \quad soit \quad C1 + 0{,}32C1 = C2(1+0{,}07)^4 \ ou\ encore$$

$$1{,}32C1 = C2(1+0{,}07)^4$$

$$\begin{cases} 1{,}32C1 = C2(1{,}07)^4 \\ C1 = 100\,000 - C2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}32(100\,000 - C2) = C2(1{,}07)^4 \\ C1 = 100\,000 - C2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 132000 - 1{,}32\ C2 = C2(1{,}07)^4 \\ C1 = 100\,000 - C2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C2\ (1{,}32 + (1{,}07)^4) = 132\,000 \\ C1 = 100\,000 - C2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C2} = \frac{132\,000}{1{,}32 + (1{,},07)^4} \\ C1 = 100\,000 - C2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C1 = 49825{,}07 dhs \\ C2 = 50174{,}93 \end{cases}$$

Exercice 22 : un capital de 82 300 Dhs a acquis au bout de 5ans de placement une valeur de 126 628,75 dhs, trouvez le taux de capitalisation annuelle des intérêts.

Solution : on a $C_0 = 82\,300\ Dhs$ $n = 5ans$ $C_5 = 126\,628{,}75$ $C_n = C_0(1+i)^n$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \qquad \text{donc} \quad i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \qquad \frac{T}{100} = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$T = \left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right) \times 100 \qquad T = \left(\sqrt[5]{\frac{126628{,}75}{82\,300}} - 1\right) \times 100 = 9\%$$

Exercice 23 : a) au bout de combien de temps un capital de 350 000 dhs augmente-t- il de 150 000 dhs par capitalisation annuelle des intérêts au taux de 10,5% l'an ?
b) Au bout de combien de temps un capital C augmente-t- il de 40% par capitalisation semestrielle des intérêts ,au taux semestriel de 4 ,5% ?

Solution : a) On a $Co = 350\,000\ Dhs$ $T = 10{,}5\%$ $C_n = 500\,000$

$C_n = Co(1+i)^n \quad A.N: 500\,000 = 350\,000(1+0{,}105)^n \quad \frac{500\,000}{350\,000} = (1+0{,}105)^n$

$\ln(\frac{500\,000}{350\,000}) = \ln(1+0{,}105)^n \quad d'où \quad n = \frac{ln(\frac{500\,000}{350\,000})}{ln(1+0{,}105)} = 3{,}572274499 \quad Soit\ \ 3ans\ 6mois\ et\ 27\ jours$

b) Co après une certaine durée devient : $Co + 40\%\ Co = 1{,}4Co$

$Cn = Co(1+i)^n$ soit $1{,}4Co = Co(1+i)^n$ ou encore $1{,}4 = (1+i)^n$

$\ln(1{,}4) = \ln(1+i)^n \quad n = \frac{ln(1{,}4)}{ln(1+i)} = 7{,}64416276\ \ soit\ \ 7semestres, 3mois\ et\ 26\ jours$

Exercice 24 : Un placement de 225 700 dhs a acquis la valeur de 500 000 dhs .Taux 10% annuel ;

Durée de placement en jours, mois ; années ?

Solution : On a $c_n = 500\,000dhs \quad et \quad c_0 = 225\,700\ dhs \quad c_n = c_0(1+i)^n$

$n = \frac{\ln(\frac{c_n}{c_0})}{\ln(1+i)} \quad n = 8{,}3453983218$ soit 8 années, 4 mois et 5 jours

Exercice 25 : Un prêt contracté il y a dix ans au taux annuel de 12% a une valeur actuelle de 440 585,42 dhs. Sachant qu'il n'y a eu aucun remboursement quelle était la valeur de ce prêt il y a 5 ans ? Quelle serait sa valeur dans deux ans ;

Solution : $Cn = 440\,585{,}42dhs \quad T = 12\% \quad i = 0{,}12$

La valeur de ce prêt il y a 5 ans est : $c_5 = c_{10}(1+i)^{-5} \quad soit \quad c_5 = 440\,585{,}42(1+i)^{-5}$

$c_5 = 250\,000$ dhs

Sa valeur dans deux ans est : $c_2 = c_{10}(1+i)^2$
$c_2 = 440\,585{,}42(1+0.12)^2 = 552\,670{,}35\ dhs$

Exercice 26 : un capital C est placé au taux de 10,5% pendant n années sachant que les intérêts produits au cours de la 2eme année de placement s'élèvent à 17 280 dhs et que le total des intérêts produits au cours des n années de placement s'élève à 142 764,85 dhs.

a) Quel est ce capital ? b) Combien d'années a-t-il été placé ?

Solution : a) $C(1+i)i = 17\,280\ dhs \quad c = \frac{17\,280}{(1+i)i}$

$c = \frac{17\,280}{(1+0{,}105)0{,}105} \quad c = 148\,933{,}42\ dhs$

b) $c(1+i)^n - 148\,933{,}42 = 142\,764{,}85$ dhs $\quad soit\ \ C(1+i)^n = 291\,698{,}27$; $(1+i)^n = \frac{291698{,}27}{148933{,}42}$

$n = \frac{ln(\frac{291698{,}27}{148933{,}42)}}{ln(1{,}105)} = 6{,}7326188626$ soit 6 années 8 mois et 24 jours

Exercice 27 : Un capital de 2 000 dhs est placé à intérêts composés. Taux 8,5% l'an

Au bout de combien d'années aura –t-il acquis une valeur de 3 354,67 dhs ? Durée de placement en jours, mois, et années .

Solution : On a $c = 2\,000\; dhs$ $t = 8{,}5\%$ $i = 0{,}085$ $C_n = 3\,354{,}67\; dhs$ et $c_n = c_0(1+i)^n$

$n = \frac{\ln\frac{c_n}{c_0}}{\ln(1+i)}$ A.N : $n = \frac{\ln\frac{3\,354.67}{2000}}{\ln(1+0.085)} = 6{,}3398664726\; ans$ soit 6 ans 4 mois et 3 jours

Exercice 28 : Quel est le capital dont la valeur acquise au bout de 4 ans est égale à 8000 dhs sachant que la capitalisation est semestrielle et que le taux d'intérêt annuel est de 8% ? (On utilisera les taux proportionnels)

Solution : On sait que $c_n = c_0(1+i)^n$

$c_0 = \frac{c_n}{(1+i)^n}$ $A.N$: $c_0 = \frac{8000}{(1+0.04)^8}$ $c_0 = 5845{,}52\; dhs$

Exercice 29 : Un capital de 10 000 dhs est placé pendant 7 ans à intérêts composés les 4 premiers années le taux est de 4% les 3 semestres suivants le taux est 3,5% et le reste du temps le taux égal à 4.6% .Quelle est la valeur acquise par ce capital au terme de son placement ?

Solution : La valeur acquise par ce capital est :

$10\,000(1+0{,}04)^4(1+0{,}035)^{1.5}(1+0{,}046)^{1.5} = 13\,177{,}75\; dhs$

Exercice 30 : 20 000 dhs sont placés à intérêts composés pendant 1an.On retire alors 15 000 dhs .Un an après ce retrait on dispose de 7 128 dhs .Déterminer le taux de capitalisation.

Solution: $(20\,000(1+i) - 15000)(1+i) = 7128$

$20\,000\,(1+i)^2 - 15\,000(1+i) - 7\,128 = 0$ $on\ pose\ x = 1+i$ on a alors:

$20\,000x^2 - 15\,000x - 7\,128 = 0$ $\Delta = (15000)^2 + 4 \times 20000 \times 7128 = 795\,240\,000$

$$\sqrt{\Delta} = 28200 \qquad X = \frac{15000 + 28200}{2 \times 20000} = 1.08$$

$$X = 1 + i \qquad i = 0.08$$

Exercice 31 : Un capital de 7000 dhs est placé à un taux annuel de 6%. La capitalisation des intérêts est mensuelle la valeur acquise est de 10 642,59 dhs. Quelle est la durée de placement ? (On utilisera les taux proportionnels)

Solution : $i_m = \frac{i_a}{12} = \frac{0.06}{12} = 5,10^{-3}$ $c_n = c_0(1+i_m)^n$

$n = \frac{\ln(\frac{cn}{c0})}{\ln(1+im)}$ $n = \frac{\ln\frac{10642.59}{7000}}{\ln(1+0.005)}$ $n = 84\; mois\ ou\ 7ans$

Exercice 32 : un capital de 12 000 dhs est placé pendant 9 ans et 9 mois aux conditions suivantes 8% par an les cinq premières années, 10% par an les 7 semestres suivants, 7% par an le reste du temps. Calculer la valeur acquise par ce capital en fin de placement (capitalisation annuelle des intérêts) ? On utilisera la solution commerciale.

Solution :

$c_n = c_0(1+i_1)^5(1+i_2)^{3+1/2}(1+i_3)^{1+\frac{1}{4}}$ A.N : $c_n = 12\,000(1+0{,}08)^5(1+0{,}1)^{3+1/2}(1+0{,}07)^{1+\frac{1}{4}}$

$c_n = 12\,000(1{,}08)^5(1{,}1)^{3+1/2}(1{,}07)^{1+\frac{1}{4}}$ $c_n = \ 26\,785{,}77dhs$

<u>Exercice 33</u> : on place 225 700 dhs à intérêts composés au taux annuel de 8,5%, on se retrouve avec une valeur acquise de 425 700 dhs.Calculez la durée de placement sachant que la capitalisation des intérêts est annuelle.

Solution : On a $C_0 = 225\,700\ dhs$ $Cn = 425\,700$ $T = 8{,}5\%$ $i = 0{,}085$
sait que $C_n = C_0(1+i)^n$

Donc $\frac{Cn}{C0} = (1+i)^n$ $\ln(\frac{cn}{C0}) = \ln(1+i)^n$ $n = \frac{ln\frac{cn}{C0}}{ln(1+i)}$

A.N : $n = \frac{ln\frac{425\,700}{225\,700}}{ln(1+0{,}085)} = 7{,}777988357$ Soit 7ans, 9 mois et 11 jours

<u>TD N°4 : LES ANNUITES</u>

<u>Exercice 1</u> : un emprunt est remboursé par le versement d'une suite d'annuités immédiates. A quel moment s'effectue le versement de la première annuité ?

rep : un an après la remise du capital emprunt

<u>Exercice 2</u> : un emprunt est remboursé par le versement d'une suite de mensualités différées de 3 mois. A quel moment s'effectue le versement de la première annuité ?

rep : 4 mois après la remise du capital emprunté

<u>Exercice 3</u> : un capital de 15000 dhs emprunté à 6% l'an est amorti par le versement d'une suite de 48 mensualités constantes et immédiates. Déterminer la mensualité de remboursement.(On utilisera le taux équivalent).

rép : 351,18 dhs

<u>Exercice 4</u> : un capital de 8 000 dhs emprunté à 7% est amorti par le versement d'une suite de 36 mensualités constantes et immédiates .Déterminer la mensualité de remboursement.(On utilisera le taux proportionnel).

rép : 247,02 dhs

<u>Exercice 5</u> : chaque fin d'année, un particulier place, sur un compte lui rapportant 5,5% un capital de 1 500 dhs (nombre de versements :4).Cinq années après le dernier versement il retire 2000 dhs et une année plus tard 2 500 dhs .L'année suivante, il décide de clôturer son compte ; Combien a-t-il en compte ?
rép: 4611,36 dhs

<u>Exercice 6</u> : un capital de 6 903,38 dhs emprunté à 8% l'an est amorti par le versement d'une suite d'annuités constantes de 1200 dhs suite différée de 2 années. Le nombre d'annuités amortissant cet emprunt est égal à ?

rép : 10

<u>Exercice 7</u> : On s'engage à verser 12 annuités de 37 580 dhs . Taux 10,5% l'an.

a) calculer le montant en fin de parcours ?
b) on verse 37 580 dhs deux ans après la 12 éme annuité .Calculer le montant obtenu 5 mois après ce dernier versement ?

Solution :

le montant en fin de parcours est : $A1 = 37\,580\,\frac{(1{,}105)^{12}-1}{0{,}105} = 828\,177{,}51 dhs$

Le montant obtenu 5 mois après le versement est :

$(828177{,}51(1+0{,}105)^{2}+37580)(1+0{,}105)^{\frac{5}{12}} = 1\,093\,358{,}40 dhs$

Exercice 8 : Une dette de 537 500 dhs est remboursable en 12 trimestrialités constantes, la première est remboursable 2 ans et 3 mois après la date du contrat .Calculer le montant trimestriel de remboursement ? Taux annuel 12%.(On utilisera le taux proportionnel)

Solution : le montant trimestriel de remboursement est :$537\,500 = a\,\frac{1-(1{,}03)^{-12}}{0{,}03}\,(1+0{,}03)^{-8}$

$$a = 68403{,}52\ dhs$$

Exercice 9 : Calculer la valeur acquise d'une suite de 17 versements annuels d'un montant de 3000 dhs chacun au taux annuel de 5,5%

a) Au moment du dernier versement ?

b) 5 mois après le dernier versement ?(on utilisera la solution commerciale) ?

c) 1an et 7 mois après le dernier versement (on utilisera la solution rationnelle) ?

Solution :a) $A_{17} = a\frac{(1+i)^{17}-1}{i}$ $\qquad A_{17} = 3000\frac{(1+0{,}055)^{17}-1}{0{,}055}$ = 80 989,21 dhs

b) 5mois après le dernier versement : $C_{0+\frac{5}{12}} = A_{17}(1+i)^{0+\frac{5}{12}}$

$$C_{0+\frac{5}{12}} = 80989{,}21(1+0{,}055)^{0+\frac{5}{12}} = 82\,816{,}27 dhs$$

c)1an et 7 mois après le dernier versement :

$$C_{1+\frac{7}{12}} = A_{17}(1+i)^1(1+\frac{7}{12}i)$$

$$A.N: \quad C_{1+\frac{7}{12}} = 80\,989{,}21(1+0{,}055)^1\left(1+\frac{7}{12}\times 0{,}055\right) = 88\,184{,}93 dhs$$

Exercice 10 : le versement de 12 annuités constantes a permis la constitution le 30 mars 2016 soit un an après le dernier versement d'un capital de 129 350 dhs à un taux annuel de 8%.Quel était le montant de chaque versement ?

Solution : $a\frac{(1+i)^{12}-1}{i}(1+i)^1 = 129\,350$

Donc $\qquad a = \frac{129\,350\times i}{((1+i)^{12}-1)(1+i)^1}$

A.N : $\qquad a = \frac{129\,350\times 0{,}08}{((1+0{,}08)^{12}-1)(1+0{,}08)^1} = 6311{,}20\ dhs$

Exercice 11 : Un particulier place sur un compte lui rapportant 4% l'an, 6 annuités de 2000 dhs le capital disponible sur ce compte 2 années après le dernier versement est égal à ?

Solution : $A_6 = a\frac{(1+i)^6-1}{i}(1+i)^2 \qquad A.N: \qquad A_6 = 2000\frac{(1+0{,}04)^6-1}{0{,}04}(1+0{,}04)^2 = 14\,348{,}445 dhs$

Exercice 12 : Monsieur X désire faire un placement .Il dépose sur un compte épargne rémunéré à 6% l'an, chaque mois, 2000dhs. Il effectue au total 7 versements : 5 versements successifs pendant 5 mois, il ne verse rien pendant les deux mois suivants et reprend les versements les deux mois qui suivent .Quelle est l'épargne constituée ? (On utilisera le taux proportionnel)

Solution : $a\frac{(1+i)^5-1}{i}(1+i)^2 + a\frac{(1+i)^2-1}{i}$

$$A.N: \quad 2000\frac{(1+0{,}005)^5-1}{0{,}005}(1+0{,}005)^2 + 2000\frac{(1+0{,}005)^2-1}{0{,}005} = 14\ 211{,}76\ dhs$$

Exercice 13 : Une personne prépare sa retraite quelle somme doit –elle verser à la fin de chaque trimestre pendant 30 ans pour constituer un capital de 500 000 dhs ? Taux : 5,25% l'an. Utiliser le taux équivalent.

Solution : On a 30×4= 120 versements

Calcul du taux trimestriel équivalent : $(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4$ $\quad i_t = \sqrt[4]{(1+i_a)^1} - 1$

$$i_t = 0{,}01287424$$

On sait que : $A_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$ donc $a = \frac{A_n \times i}{(1+i)^n-1}$ A.N : $a = \frac{500\ 000 \times 0{,}01287424}{(1+0.01287424)^{120}-1} = 1767{,}69dh$

Exercice 14 : Une dette de 350 000 dhs est remboursable en 10 semestrialités constantes la première étant payable dans 6 mois, taux 6% le semestre.

a) calculer la semestrialité de remboursement ?
b) calculer la valeur de cette dette 1 an avant le premier versement ?
c) calculer la valeur de cette dette 3 mois après le premier versement ?

On utilisera la solution commerciale

Solution : a) la semestrialité de remboursement est : $a = \frac{A_n \times i}{1-(1+i)^{-n}}$ A.N : $a = 47553{,}79\ dhs$

b)la valeur de cette dette 1 an avant le premier versement :

$$A = 350\ 000(1+i)^{-1} = \quad 330\ 188{,}68 dhs$$

Exercice 15 : Une automobile est vendue 169 924,68 dhs aux conditions suivantes : 30% à la commande, le reste en 36 mensualités au taux de 7,5% l'an.

Déterminer : a) la mensualité de remboursement ? (on utilisera le taux proportionnel)

b) l'intérêt payé ?

Solution : On sait que $A_{36} = a\frac{1-(1+i)^{-36}}{i}$ Donc $a = \frac{A_{36} \times i}{1-(1+i)^{-36}}$ A.N :$a = \frac{0.7 \times 169\ 924.68 \times (0.075/12)}{1-(1+0.075/12)^{-36}} = 3\ 700\ dhs$

b) l'intérêt payé : $(3\ 700 \times 36) - (169\ 924{,}68 \times 0.7) = 14\ 252{,}72 dhs$

Exercice 16: on s'engage à verser 12 annuités de 25 780 dhs chacune. Le taux est de 10,5% l'an. Calculez le capital 1an et 5mois après le dernier versement (solution rationnelle).

Solution : On a $n = 12 \quad a = 25\ 780 \quad i = 0{,}105 \quad A_{12} = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$

A.N : $A_{12} = 25\ 780\frac{(1+0{,}105)^{12}-1}{0{,}105} = 568\ 132{,}41 \quad dhs$ $\quad C_{1+5/12} = A_{12}(1+i)^1(1+i\times\frac{5}{12})$

A.N : $C_{1+5/12} = 568\ 132{,}41(1+0{,}105)^1\left(1+0{,}105\times\frac{5}{12}\right) = 655\ 251{,}96\ dhs$

Exercice 17 : Une dette de 357 500 dhs est remboursable en 12 semestrialités constantes la première étant payable 3 ans après la date du contrat, taux 12% l'an. Calculez la semestrialité de remboursement en utilisant le taux équivalent.

Solution : calcul du taux équivalent : $(1+ia) = (1+is)^2$ $\sqrt{1+ia} - 1 = is$
$A.N$: $is = \sqrt{1+0{,}12} - 1 = 0{,}05830052443$

Et on sait que : $a = \frac{An\times i}{(1-(1+i)^{-n})(1+is)^{-5}}$ A.N : $a = \frac{357\ 500\times 0{,}05830052443}{(1-(1+0{,}058300552443)^{-12})(1+0{,}05830052443)^{-5}} = 56\ 081{,}76\ dhs$

Exercice 18:Un investisseur souhaite constituer un fonds financier par des versements de 12 800 dhs pendant 5 ans au taux annuel de 3,75%.Ensuite , il a prévu de placer le capital obtenu pendant 4 ans au taux annuel de 6,75% , combien aura-t-il obtenu à la fin de son projet ?

Solution : Premier placement : $12\ 800\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$ A.N : $12\ 800\ \frac{(1+0{,}0375)^5-1}{0{,}0375} = 68\ 983{,}4\ dhs$

Deuxième placement : $68\ 983{,}4\ \times(1+i)^n$ $A.N$: $68\ 983{,}4\times(1+0{,}0675)^4 = 89\ 581{,}05\ dhs$

Exercice 19 : Une personne verse à intervalles réguliers égaux à une année des sommes constantes de montant $25\ 000$ Dhs chacune à un organisme de capitalisation .taux= 10,5% l'an .date du premier versement le 01/12/2010, date de dernier versement le 01/12/2024.
a)Calculer le capital constitué à la date du 01/12/2024.

b) à la date de 01/07/2025

c) à la date 01/07/2026

d) à la date 01/12/2026

Solution : $a)$ $An = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$ A.N: $An = 25000\ \frac{(1+0{,}105)^{15}-1}{0{,}105} = 826\ 500{,}88$

b) Solution rationnelle:

Le 01/07/2025 on a $k=0$ $p/q = 7/12$ $C_{k+\frac{p}{q}} = An(1+i)^k(1+\frac{p}{q}\times i)$

A.N : $C_{0+\frac{7}{12}} = 826\ 500{,}88(1+0{,}105)^0\left(1+\frac{7}{12}\times 0{,}105\right) = 877\ 124{,}06\ dhs$

Solution commerciale : $C_{k+\frac{P}{q}} = An(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$ A.N : $C_{0+\frac{7}{12}} = 826\ 500{,}88(1+0{,}105)^{7/12}$

$= 876\ 068{,}74\ dhs$

c) à la date 01/07/2026 : solution rationnelle : $C_{k+\frac{P}{q}} = An(1+i)^k(1+\frac{p}{q}\times i)$

A.N : $C_{1+\frac{7}{12}} = 826\ 500{,}88(1+0{,}105)^1\left(1+\frac{7}{12}\times 0{,}105\right) = 969222{,}09\ dhs$

Solution commerciale : $C_{k+\frac{P}{q}} = An(1+i)^{k+\frac{P}{q}}$

A.N : $C_{1+\frac{7}{12}} = \quad 826\ 500{,}88(1+0{,}105)^{1+\frac{7}{12}} \quad = 968\ 055{,}51\ dhs$

d) à la date 01/12/2026 $\quad Cn = An(1+i)^n \qquad Cn = 826\ 500{,}88(1+0{,}105)^2 = $ 1 009 178,237 dhs

Exercice 20 : Une dette de 537 500 dhs est remboursable en 12 trimestrialités constantes, la première est remboursable 2ans et 3 mois après la date du contrat .Calculer le montant trimestriel de remboursement ? Taux annuel 12%.(On utilisera le taux proportionnel).

Solution : le montant trimestriel de remboursement est donné par : $537\ 500 = a\ \frac{1-(1{,}03)^{-12}}{0{,}03}\ (1+0{,}03)^{-4}$

Soit $a = 60775{,}64\ dhs$

Exercice 21 : Calculer la valeur acquise d'une suite de 17 versements annuels d'un montant de 3000 dhs chacun au taux annuel de 5,5%.

a)au moment du dernier versement

b) 5 mois après le dernier versement (solution commerciale)

c) 1an et 7 mois après le dernier versement (solution rationnelle)

Solution :a) $A_{17} = a\frac{(1+i)^{17}-1}{i}$ A.N : $A_{17} = 3000\frac{(1+0{,}055)^{17}-1}{0{,}055} = 80\ 989{,}21\ dhs$

b) 5 mois après le dernier versement : $C_{0+\frac{5}{12}} = A_{17}(1+i)^{0+\frac{5}{12}}$

$$C_{0+\frac{5}{12}} = 80\ 989{,}21(1+0.055)^{0+\frac{5}{12}} = 82816{,}27dhs$$

c)1an et 7 mois après le dernier versement solution rationnelle : $C_{1+\frac{7}{12}} = A_{17}(1+i)^1(1+7/12i)$

$$A.N: \qquad C_{1+\frac{7}{12}} = 80\ 989,21(1+0{,}055)^1\left(1+\frac{7}{12}\times 0{,}055\right) = 88\ 184{,}93dhs$$

Exercice 22 : le versement de 12 annuités constantes a permis la constitution le 30 mars 2016 soit un an après le dernier versement d'un capital de 129 350 dhs à un taux annuel de 8% quel était le montant de chaque versement ?

Solution : $A_{12} = a\frac{(1+i)^{12}-1}{i}(1+i)^1 = 129\ 350$ Donc $\qquad a = \quad \frac{129\ 350\times i}{((1+i)^{12}-1)(1+i)^1}$

A.N : $a = \frac{129\ 350\times 0{,}08}{((1+0{,}08)^{12}-1)(1+0{,}08)^1} = 6311{,}20\ dhs$

TD N°5 : LES AMORTISSEMENTS DES EMPRUNTS INDIVIS

Exercice 1 :

Un emprunt de 450 000 DHS est remboursable en 6 annuités constantes la première étant payable dans un an taux 12% l'an

a)calculer l'annuité de remboursement ?

b) établir le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré ?

c)Déterminer le montant de la dette 3 mois après le versement de la 4eme annuité (deux solutions) ?

Solution :

a) $A_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ $450\ 000 = a\frac{1-(1+0{,}12)^{-6}}{0{,}12}$ $a = 109451{,}57dhs$

b) amortissement = annuité- intérêt

Capital restant = capital – amortissement

Intérêt= capital × taux

année	principal	intérêt	annuités	amortissement	solde
1	450 000	54000	109451,57	55451,57	394548,43
2	394548,43	47345,81	109451,57	62105,76	332442,66
3	332442,66	39893,11	"	69558,45	262884,21
4	262884,21	31546,11	"	77905,47	184978,74
5	184778,74	21197,45	"	87254,12	97724,62
6	7724,42	11726,95	"	97724,62	0,00

c) $\mathrm{D}_4 = 184\ 978{,}74\mathrm{dhs}$

Solution rationnelle : $\mathrm{D}_{4+\frac{3}{12}} = 184\ 978{,}74\left(1 + \frac{3}{12} \times 0{,}12\right) = 190\ 528{,}10$ dhs

Solution commerciale : $\mathrm{D}_{4+\frac{3}{12}} = 184\ 978{,}74(1 + 0{,}12)^{\frac{3}{12}} = 190\ 294{,}54$ dhs

EXEMPLE D'EXAMEN FINAL (à traiter en 1H30)

Exercice1 : Un capital de 2000 dhs est placé à intérêts composés au taux de 8,5% l'an .Après combien de temps aura-t-il acquis une valeur de 3245,34 dhs ?

Exercice2 : Un prêt contracter il y a 10ans au taux annuel de 12% a une valeur actuelle de 528 602,5 dhs sachant qu'il n'a eu aucun remboursement quelle était la valeur de ce prêt Il y a 5ans ?Quelle serait sa valeur dans deux ans ?

Exercice 3 : On s'engage a verser 12annuités constantes de 37 580 dhs chacune. taux :10,5% l'an .quel est le montant en fin de parcours ?

En verse 37 580 deux ans après la 12éme annuité. Quelle serait la valeur acquise 5 mois après ce versement ? On utilisera la solution commerciale.

Exercice4 : Une dette de 179 097,30 dhs est remboursable en 12 trimestrialités constantes. Le versement de la première trimestrialité s'effectue 1an et 3 mois après la date du contrat. Taux : 12% l'an (utiliser le taux équivalent) .Quelle serait la trimestrialité de remboursement ?

Exercice 5 : 3 capitaux placés à intérêts simples au 15/05/A à des conditions différentes le premier de 2 088 dhs à 8,5% jusqu'au 17/06/A le second de 1 472 dhs à 6,4% jusqu'au 15/07/A et le troisième 3 035 dhs à 5,5% jusqu'au 18/08/A .Déterminer le taux moyen de placement.

Exercice 6 : Un effet de 3 500 dhs au 15/5/14 et un effet de 3 700 dhs au 20/07/14 sont remplacés le 21/03/14 par un effet unique de 7200 dhs. Quelle est la date d'échéance de l'effet de remplacement ?

Solution :

Exercice 1 : On a $C_0 = 2\,000\ dhs$ $\quad C_n = 3\,245{,}34$ $\quad i = 0{,}085$ $\quad on\ sait\ que$ $\quad C_n = C_0(1+i)^n$

Donc $\quad 3\,245{,}34 = 2\,000(1+0{,}085)^n$ $\quad \frac{3\,245{,}34}{2\,000} = (1+0{,}085)^n$ $\quad \ln(\frac{3\,245{,}34}{2\,000}) = \ln(1+0{,}085)^n$

Alors $n = \frac{\ln(\frac{3\,245{,}34}{2\,000})}{\ln(1+0{,}085)}$ soit $\quad n = 5{,}9337217719$ $\quad$ soit $\quad n = 5ans\ ,11mois\ et\ 7jours$

Exercice 2 : On a $\quad i = 0{,}12$ $\quad n = 10$ $\quad A_{10} = 528\,602{,}5\ Dhs$

1) $C_5 = A_{10}(1+i)^{-5}$ $\quad C_5 = 528\,602{,}5(1+0{,}12)^{-5}$ $\quad C_5 = 299\,943{,}25\ dhs$
2) $C_2 = A_{10}(1+i)^2$ $\quad C_2 = 528\,602{,}5(1+0{,}12)^2$ $\quad C_2 = 663\,078{,}97\ dhs$

Exercice 3 : On a $n = 12$ $\quad a = 37\,580\ dhs$ $\quad i = 0{,}12$

1) $A_{12} = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$ $\quad$ A.N $A_{12} = 37\,580\frac{(1+0{,}105)^{12}-1}{0{,}105} = 828\,177{,}50\ dhs$

2) $C_2 = A_{12}(1+i)^2$ $\quad$ A.N :$C_2 = 828\,177{,}5(1+0{,}105)^2 = 1\,011\,225{,}43\ dhs$

Après on verse 37 580 dhs donc on va avoir $\quad C = C_2 + 37\,580 = 1\,048\,805\,,43\ dhs$

Alors la valeur acquise après 5 mois sera :$C_{0+\frac{5}{12}} = C(1+i)^{0+5/12} = 1\,048\,805{,}43(1+i)^{0+5/12}$

=1093358,39 dhs

Exercice 4 : On calcule d'abord le taux équivalent :$(1+ia)^3=(1+it)^{12}$ $\sqrt[12]{(1+ia)^3}-1 = it$

$$It = 0,02873734472$$

$a = \frac{An\times i}{(1-(1+i)^{-n})(1+i)^{-4}}$ A.N : $a = \frac{179\,097,3\times 0,02873734472}{(1-(1+0,02873734472)^{-12})(1+0,02873734472)^{-4}} = 20\,000\ dhs$

Exercice 5 : On a $C1 = 2088$ $t1 = 8,5\%$ $j1 = 33\ jrs$

$C2 = 1472$ $t2 = 6,4\%$ $j2 = 61jrs$

$C\,3 = 3035$ $t3 = 5,5\%$ $j3 = 95jrs$

$Tm = \frac{C1J1t1+C2J2t2+C3J3t3}{C1J1+C2J2+C3J3}$ A.N :$Tm = \frac{2088\times 8,5\times 33+1472\times 6,4\times 61+3035\times 5,5\times 95}{2088\times 33+1472\times 61+3035\times 95} = 6,14\%$

Exercice 6 : On a $v1 = 3\,500\ dhs$ $J1 = 55jours$ $V2 = 3\,700dhs$ $J2 = 121jours$

On sait que dans l'échéance moyenne : $VJ = V1J1 + V2J2$ $Donc$ $j = \frac{V1J1+V2J2}{V}$

A.N : $J = \frac{3\,500\times 55+3\,700\times 121}{7\,200} = 89\ jours$ l'échéance se situe le 18/06/2014